

14º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2023

Espectroscopia de Impedância: Abordagens Matemáticas na Análise de Circuitos RC

MARIA CLARA S. BOAVENTURA¹, SAULO PORTES DOS REIS²

¹ Graduando em Engenharia Civil, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus Votuporanga, m.boaventura@aluno.ifsp.edu.br.

² Doutorado em Ciência dos Materiais, UNESP, Faculdade de engenharia de Ilha Solteira, spdreis@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento: 3.01.00.00-3 Engenharia Civil

Área de conhecimento: 1.05.07.15-9 Materiais Dielétricos e Propriedades Dielétricas

RESUMO: A Espectroscopia de Impedância é uma técnica valiosa para caracterizar materiais e analisar propriedades elétricas, aplicável em áreas como ferroelétricos, dielétricos, baterias e medicina (Bioimpedância). Ela mede a resistência e reatância, considerando elementos de circuitos como resistores e capacitores, revelando a resposta do sistema à corrente alternada e sua defasagem. Usando números complexos para facilitar interpretação, a técnica ajuda a determinar componentes resistivas (R) e capacitivas (C) dos materiais. Contudo, apesar de sua relevância em diversas áreas científicas e industriais, a Espectroscopia de Impedância frequentemente carece de destaque em cursos de graduação, resultando em uma lacuna educacional. Para explorar seu potencial, é crucial expandir o ensino e a pesquisa nesse campo, capacitando futuros profissionais para aproveitar suas oportunidades.

PALAVRAS-CHAVE: impedância; números complexos; resistor; capacitor; reatância; defasagem.

Impedance Spectroscopy: Mathematical Approaches in the Analysis of RC Circuits

ABSTRACT: Impedance Spectroscopy is a valuable technique for characterizing materials and analyzing electrical properties, applicable in areas such as ferroelectrics, dielectrics, batteries and medicine (Bioimpedance). It measures resistance and reactance, considering circuit elements such as resistors and capacitors, revealing the system's response to alternating current and its phase shift. Using complex numbers to facilitate interpretation, the technique helps to determine resistive (R) and capacitive (C) components of materials. However, despite its relevance in several scientific and industrial areas, Impedance Spectroscopy often lacks prominence in undergraduate courses, resulting in an educational gap. To exploit its potential, it is crucial to expand teaching and research in this field, training future professionals to take advantage of its opportunities.

KEYWORDS: impedance; complex numbers; resistor; capacitor; reactance; lag.

INTRODUÇÃO

A impedância é a resistência ao fluxo de corrente alternada em circuitos (DOS REIS et al., 2021), considerando elementos como resistores, indutores e capacitores, incorporando tanto a resistência quanto a reatância. A espectroscopia de impedância é aplicada na caracterização de materiais, como cerâmicas ferroelétricas, dielétricos e condutores, envolvendo a aplicação de corrente alternada e a análise da resposta do material (OLIVEIRA, 2022). Os dados obtidos geram um gráfico de espectro de

impedância são frequentemente analisados usando números complexos, os quais descrevem a impedância em sua parte real e imaginária no plano Argand-Gauss.

A abordagem via números complexos facilita a interpretação, principalmente na descrição de circuitos elétricos equivalentes (WEST, et al., 1997). Essa técnica é usada em diversas áreas, como pesquisa de baterias, células solares (GOÉS, 2010) e bioimpedância na detecção de câncer (PALACIO, 2017). No entanto, a espectroscopia de impedância muitas vezes carece de destaque nos cursos de graduação, apesar de sua ampla aplicabilidade. É essencial ampliar o ensino e a pesquisa nesse campo para aproveitar plenamente suas oportunidades em várias áreas científicas e industriais.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Como aluna de primeiro ano, foi necessário abordar, em um primeiro momento, os princípios dos números complexos, esses conceitos são fundamentais para o estudo da impedância, cujo livro "A Matemática do Ensino Médio", publicado pela editora SBM (LIMA, 2016) foi adotado como guia de estudo. Para adquirir também uma base de formação teórica da espectroscopia de impedância utilizou-se como guia de estudo artigos de espectroscopia de impedância (CHINAGLIA, D. L. et al., 2008, GARCÍA-SÁNCHEZ. et al., 2003), os quais serviram como embasamento teórico e demonstrativo para a ideias de impedância. Dessa forma, foi possível compreender como determinar o valor da impedância em circuitos resistor-capacitor.

A espectroscopia de impedância é uma técnica utilizada para analisar como um material responde a um campo elétrico variável no tempo. Isso envolve a propor um circuito cuja resposta elétrica seja equivalente à do material inserido entre placas condutoras. A amostra em estudo se comporta como o dielétrico de um capacitor, e a aplicação de uma tensão alternada para obter informações sobre as propriedades elétricas do material, como permissividade e condutividade (OLIVEIRA, 2022).

Quando elementos de circuito como resistores, capacitores ou indutores são submetidos a uma tensão alternada, a ideia de resistência elétrica é estendida, visto que capacitores e indutores começam a apresentar uma espécie de "resistência" à passagem de corrente. No caso de uma tensão alternada senoidal, a impedância é a medida da oposição que um circuito oferece ao fluxo de corrente.

A impedância pode ser definida de duas maneiras: como uma grandeza real ou como uma grandeza complexa. A definição da impedância real (Z) é a razão entre a tensão máxima ($V_{máx}$) e a corrente máxima ($I_{máx}$) em um circuito, ou seja:

$$Z = \frac{V_{máx}}{I_{máx}} \quad (1)$$

Consideremos uma tensão senoidal, dada por $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, no qual ω representa a frequência angular dessa oscilação e V_0 é o valor máximo da tensão gerada (também chamada de tensão de corte). Aplicando a lei de Ohm, que relaciona a tensão, a resistência e a corrente em um circuito elétrico ($V=R.I$), podemos chegar à seguinte relação:

$$V(t) = R.I \Rightarrow V_0 \cos(\omega t) = R I(t) \Rightarrow I(t) = \frac{V_0}{R} \cos(\omega t) \quad (2)$$

Pela relação, é notório que a tensão e a corrente estão em fase. Isso implica que o valor máximo da corrente, representa por I_0 , é dada pela relação $\frac{V_0}{R}$. Em outras palavras, em circuitos completamente resistivos, a impedância será:

$$Z_R = \frac{V_0}{\frac{V_0}{R}} \Rightarrow Z_R = R \quad (3)$$

Ou seja, a impedância em um circuito puramente resistivo é igual a própria resistência.

Podemos descrever o mesmo resultado com a utilização da ideia de impedância complexa (Z^*), na qual, tanto a tensão quanto a corrente são tratadas como valores complexos. Nesse caso, definimos a

impedância complexa como sendo idêntica a lei de Ohm. Nesse caso, dada uma tensão senoidal variável $V^*(t) = V_0 e^{i\omega t}$, e uma corrente variável $I^*(t) = I_0 e^{i\omega t}$ temos:

$$V^* = Z_R^* \cdot I^* \Rightarrow Z_R^* = \frac{V_0 e^{i\omega t}}{I_0 e^{i\omega t}} \Rightarrow Z_R = R \quad (4)$$

Conclui-se, portanto, que em um resistor ideal, a corrente está em fase com a tensão e que as impedâncias real e imaginária são iguais e dadas por:

$$Z_R = Z_R^* = R \quad (5)$$

Como mencionado anteriormente, a impedância é uma medida da oposição ao fluxo de corrente elétrica. Em dispositivos como resistores, essa oposição resulta na dissipação de energia na forma de calor, ao contrário de capacitores, que armazenam energia no campo elétrico, e indutores, que armazenam energia no campo magnético. Quando um capacitor está sujeito a uma tensão alternada, ocorre uma alternância na carga das suas placas. No caso de uma tensão senoidal, na primeira metade do ciclo, uma das placas se carrega positivamente, enquanto a outra se carrega negativamente. No entanto, na segunda metade do ciclo, essa polaridade se inverte. A figura 1 ilustra esse processo.

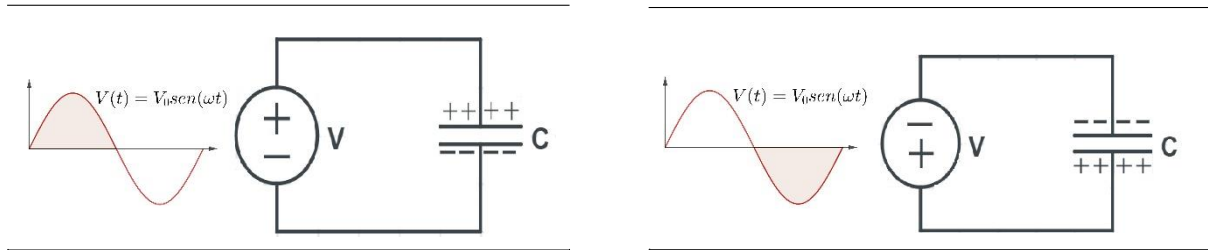


Figura 1: Troca de polaridade nas armaduras de um capacitor devido a uma tensão senoidal.

Essa inversão de polaridade indica a presença de um fluxo de carga elétrica, mesmo que não haja uma corrente elétrica direta através do capacitor. Isso significa que existe uma espécie de "resistência" a esse movimento de carga elétrica, chamada de reatância capacitiva χ_C . Em resumo, a impedância de um capacitor ideal é representada pela reatância capacitiva.

Podemos calcular a reatância capacitiva χ_C usando a relação $Q(t) = CV(t)$. Se a tensão aplicada for dada por $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$, podemos determinar a reatância capacitiva real dessa forma:

$$\frac{d}{dt} V(t) = \frac{1}{C} \frac{d}{dt} Q(t) \Rightarrow -\omega V_0 \sin(\omega t) = \frac{I(t)}{C} \Rightarrow I(t) = -\omega C V_0 \sin(\omega t) \quad (6)$$

Para entender a relação entre as fases da corrente e da tensão, podemos observar que $-\sin(\omega t)$ é igual a $\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Em outras palavras, $I(t) = \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Isso implica que a corrente está adiantada em $\frac{\pi}{2}$ em relação à tensão. Esta análise também é análoga a $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$ e $I(t) = \omega C V_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$. Isso é ilustrado na figura 2.

Portanto, a impedância de um capacitor é dada por:

$$Z_C = \frac{V_{\max}}{I_{\max}} \Rightarrow Z_C = \frac{V_0}{\omega C V_0} \Rightarrow Z_C = \frac{1}{\omega C} \quad (7)$$

Para aplicar a definição de impedância complexa, é necessário considerar que a carga também pode ser complexa, ou seja, $Q^* = C \cdot V^*$. É importante destacar que ao considerar a capacitância C como um valor real, estamos assumindo que o capacitor é ideal. Portanto, quando lidamos com uma tensão variável expressa como $V^*(t) = V_0 e^{i\omega t}$, podemos escrever o seguinte:

$$V^*(t) = V_0 e^{i\omega t} \Rightarrow V^*(t) = \frac{Q^*(t)}{C} \Rightarrow \frac{d}{dt}(V_0 e^{i\omega t}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q^*(t)}{C}\right) \Rightarrow i\omega V^*(t) = \frac{I^*(t)}{C} \quad (8)$$

Ou seja, a impedância complexa de um capacitor pode ser definida como:

$$Z_C^* = \frac{V^*(t)}{I^*(t)} \Rightarrow Z_C^* = \frac{V^*(t)}{i\omega C} \Rightarrow Z_C^* = \frac{1}{i\omega C} \quad (9)$$

Da equação acima vemos que para um capacitor ideal a impedância complexa (ou reatância capacitiva complexa) é um imaginário puro negativo, mais ainda, podemos concluir que o módulo da reatância complexa é igual a reatância real, isto é:

$$|Z_C^*| = \frac{1}{\omega C} \quad (10)$$

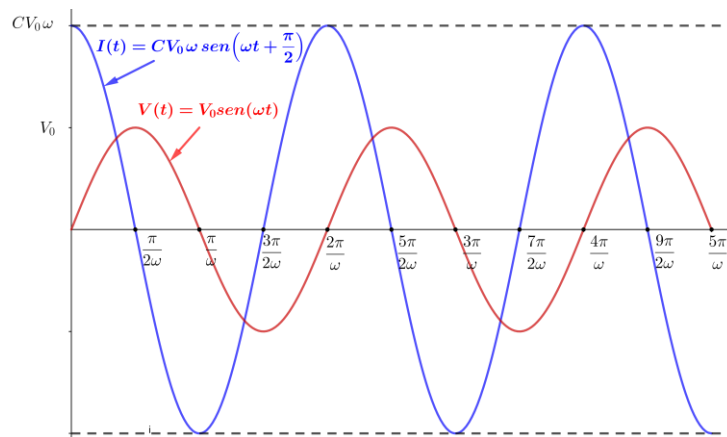


Figura 2: Representação dos sinais da tensão e da corrente.

CIRCUITOS EQUIVALENTES

Agora será apresentado o cálculo da impedância equivalente para associações de capacitores e resistores. Como anteriormente descreverei a impedância real e a impedância complexa.

Associação em Série: Uma associação em série é caracterizada pelo fato de a mesma corrente passar pelos elementos do circuito, assim quando temos um resistor e um capacitor em série a tensão total é dividida, uma parte para o resistor e outra para o capacitor. Em um circuito RC em série, a impedância complexa resulta em uma distribuição da tensão total da seguinte forma:

$$V^*(t) = V_R^* + V_C^* \Rightarrow V^*(t) = (Z_R^* + Z_C^*)I^*(t) = Z_{eq}^* I^*(t) \quad (11)$$

Substituindo então as equações, tem-se que:

$$Z^* = R + \frac{1}{i\omega C} = R - i\chi C \quad (12)$$

É evidente que a impedância complexa total é a soma das impedâncias dos componentes individuais, de acordo com a mesma regra de associação utilizada para resistores. Isso é previsível, dado que a equação de impedância complexa é definida com base na Lei de Ohm. A correspondência entre a impedância real e a impedância complexa pode ser verificada calculando o módulo da impedância complexa total e o seu argumento.

$$|Z^*| = \sqrt{R^2 + \chi_C^2} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (13)$$

CONCLUSÕES

Portanto, podemos concluir que, quando temos uma associação em série entre um resistor e um capacitor, a impedância complexa resultante possui um valor absoluto dado pela acima, que equivale à definição de impedância real. Esta mesma base é análoga para a associação em paralelo de resistores, considerando que a associação em paralelo é caracterizada pelo fato de que todos os elementos de circuito estão submetidos a mesma tensão, fazendo assim com que a corrente total seja dividida.

Dessa forma, as análises anteriores nos indicam que o estudo da espectroscopia de impedância é facilitado ao adotarmos a notação complexa. A parte real da impedância complexa está associada a elementos resistivos do circuito, isto é a dissipação de energia na forma de energia térmica, ao passo que a parte complexa está associada elementos de reatância, isto é, ao armazenamento de energia. Isso pode ser visto nas análises das associações em série e em paralelo, nas quais a parte real apresenta somente elementos resistivos e a parte imaginária apresenta somente elementos de reatância.

Assim, uma impedância com parte imaginária nula indica que apenas os efeitos resistivos são relevantes, ao passo que em uma impedância puramente imaginária apenas os efeitos capacitivos são considerados. Portanto, é evidente que essa análise detalhada das partes real e imaginária da impedância complexa é de extrema importância, pois fornece uma compreensão mais profunda das características de um circuito elétrico e ajuda os engenheiros e cientistas a projetarem e otimizar sistemas elétricos para diversas aplicações. Isso é essencial para o desenvolvimento de tecnologias mais eficientes e a solução de problemas em uma ampla gama de áreas, desde eletrônica até sistemas de energia.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

M.C.S.B. e S.P.R. atuaram na redação do trabalho. Todos os autores contribuíram com a revisão do trabalho e aprovaram a versão submetida.

AGRADECIMENTOS

Expresso minha gratidão ao professor Dr. Saulo Portes dos Reis por sua orientação dedicada e paciente. Como também, ao IFSP campus Votuporanga pelo apoio e financiamento da bolsa de estudos.

REFERÊNCIAS

CHINAGLIA, D. L. et al. Espectroscopia de impedância no laboratório de ensino. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 30, n. 4, p. 4504.1-4504.9, 2008.

DOS REIS, S. P.; MINUSSI, F. B.; ARAUJO, E. B. Thermally activated processes and bias field effects on the electrical properties of BiFeO₃ thin films. **Nanomaterials Science & Engineering**, v. 2, n. 1, p. 25–34, 2020.

GÓES, M. S. **Análise de nanoestruturas por espectroscopia de impedância para células fotoeletroquímicas**. 2010. 134 f. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Química, 2010. Cap. 1, p. 48.

JONSCHER, A. K. A new understanding of the dielectric relaxation of solids. **Journal of materials science**, v. 16, n. 8, p. 2037–2060, 1981.

PALACIO, J. A. A. **Gerador de sinais para aplicação da espectroscopia de bioimpedância elétrica na detecção de câncer**. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2017.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio**. Coleção do professor de Matemática. vol 3. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2016.

MARIO F. GARCÍA-SÁNCHEZ, JEAN-CLAUDE M'PEKO, A. RABDEL RUIZ-SALVADOR, GEONEL RODRÍGUEZ-GATTORNO, YURI ECHEVARRÍA. **An Elementary Picture of Dielectric Spectroscopy in Solids: Physical Basis**. *Journal of Chemical Education*, v. 80, p. 1062–1073, set. 2003.

OLIVEIRA, G. W. C. **Alguns formalismos matemáticos utilizados em espectroscopia de impedância - Circuito RC**. Monografia- IFSP-Votuporanga, SP, 2022.

JONSCHER, A. K. A new understanding of the dielectric relaxation of solids. **Journal of materials science**, v. 16, n. 8, p. 2037–2060, 1981.

WEST, A. R.; SINCLAIR, D. C.; HIROSE, N. **Characterization of electrical materials, especially ferroelectrics, by impedance spectroscopy**. *Journal of electroceramics*, Springer, v. 1, n. 1, p. 65–71, 1997.