

14^o Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2023

UMA INTRODUÇÃO ÀS BASES DE AUTOVETORES GENERALIZADOS NA FORMA CANÔNICA DE JORDAN

JOÃO VICTOR P. BRAMBILA¹, ISMAEL DA SILVA PENA²

¹Graduando em Licenciatura em Matemática, voluntário PIVICT, IFSP Câmpus Birigui, joao.brambila@aluno.ifsp.edu.br.

²Doutor em Matemática, docente no IFSP Câmpus Birigui, orientador PIVICT, ismael.pena@ifsp.edu.br
Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.01.00-4 Álgebra

RESUMO: Este resumo expandido apresenta uma introdução aos conceitos de autoespaço generalizado e autovetores generalizados e sua relação com a decomposição de operadores lineares na Forma Canônica de Jordan. Essa relação se dá através da construção de bases de autovetores generalizados, encontradas a partir de cadeias de Jordan, utilizando as propriedades de subespaços invariantes ao operador linear decomposto, bem como a restrição deste a esses subespaços. Ao fim, é apresentada uma aplicação da Forma Canônica de Jordan a sistemas de equações diferenciais lineares.

PALAVRAS-CHAVE: autoespaços generalizados; operadores lineares; cadeias de jordan; espaços lineares; sistemas de equações diferenciais lineares.

AN INTRODUCTION TO BASES OF GENERALIZED EIGENVECTORS ON THE JORDAN CANONICAL FORM

ABSTRACT: This extended abstract presents an introduction to the concepts of generalized eigenspace and generalized eigenvectors and their relation to the decomposition of linear operators on the Jordan Canonical Form. This relationship takes place through the construction of bases of generalized eigenvectors, found from Jordan chains, using the properties of invariant subspaces to the decomposed linear operator, as well as its restriction to these subspaces. At the end, an application of the Jordan Canonical Form to systems of linear differential equations is presented.

KEYWORDS: generalized eigenspaces; linear operators; jordan chains; linear spaces; systems of linear differential equations.

INTRODUÇÃO

Um dos pontos centrais do estudo dos operadores lineares em dimensão finita são as condições para obter bases ordenadas que tornem “mais simples” a matriz de representação desses operadores. Por exemplo, pelo Teorema da Diagonalização, através de uma base de *autovetores*, podemos observar o caso em que é possível obter uma matriz diagonal para a representação de um operador linear. Esse

caso, embora muito desejável, dada a simplicidade da matriz diagonal, não é sempre possível. Assim, uma generalização desse resultado está na obtenção de uma *matriz diagonal em blocos* como matriz de representação. Particularmente, trataremos da representação como uma *matriz de Jordan*, cuja diagonal é formada pelos chamados blocos de Jordan, a qual permite inferir uma série de informações a respeito do operador linear representado e apresenta propriedades que facilitam a sua manipulação. Apresentamos a relação entre essa representação e a obtenção de uma base de *autovetores generalizados*, bem como uma introdução à forma de obter essa base. Ao fim, mostramos como as propriedades da Forma Canônica de Jordan auxiliam na resolução de sistemas de equações diferenciais lineares.

MATERIAIS E MÉTODOS

Foi realizada uma revisão bibliográfica a respeito do tema, particularmente quanto aos conceitos fundamentais da Álgebra Linear em Lima (2018), subespaços invariantes e formas canônicas em Coelho e Lourenço (2018) e autoespaços generalizados em Santos (2010). Como se trata de um trabalho introdutório, não houve aprofundamento quanto ao processo de aplicação das cadeias de Jordan na *obtenção de vetores iniciais*. Para mais detalhes quanto a essa aplicação, recomendamos Santos (2010). Além disso, consultamos Oliveira (2017) para representar um exemplo de aplicação da Forma Canônica de Jordan na resolução de sistemas de equações diferenciais lineares.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

No decorrer das discussões, \mathbb{K} sempre representará um corpo, que pode ser lido como o conjunto \mathbb{C} dos complexos ou \mathbb{R} dos reais, ao passo que V denota um espaço vetorial de dimensão finita sobre \mathbb{K} . Além disso, $M_{m \times n}(\mathbb{K})$ denotará o conjunto das matrizes $m \times n$ sobre \mathbb{K} , com $M_n(\mathbb{K}) = M_{n \times n}(\mathbb{K})$, enquanto I_n representa a matriz identidade de ordem n . No demais, T denotará um operador linear em V , sendo I o operador identidade e $[T]_{\mathcal{B}}$ a matriz de T quanto à base ordenada \mathcal{B} .

Definição 1. Dado um operador linear $T : V \rightarrow V$, com $\dim V = n$ o *polinômio característico* de T , denotado por $p_T(x)$, é definido como $p_T(x) = \det[T - xI]_{\mathcal{B}}$. O resultado desse determinante independe da base \mathcal{B} tomada e o grau de $p_T(x)$ é sempre igual a $\dim V$.

Definição 2. Dado um operador linear $T : V \rightarrow V$, um vetor $v \in V$ não nulo e um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, caso tenhamos $T(v) = \lambda v$ ou, equivalentemente, $(T - \lambda I)(v) = 0$ dizemos que λ é um *autovalor* de T e que v é um *autovetor* associado a λ . Definimos, com isso, o conjunto $\text{Aut}_T(\lambda)$, um subespaço de V denominado *autoespaço associado a λ* : $\text{Aut}_T(\lambda) = \{v \in V; v = 0 \text{ ou } v \text{ é autovetor de } T \text{ associado a } \lambda\}$.

A partir disso, um resultado usual da Álgebra Linear é o fato de que os autovalores de um operador linear T são precisamente as raízes de seu polinômio característico. Nesse contexto, definem-se dois parâmetros a partir de um autovalor λ de T : $m_a(\lambda)$, denominada multiplicidade *algébrica* de λ , é a multiplicidade de λ enquanto raiz de $p_T(x)$, ao passo que $m_g(\lambda)$, denominada multiplicidade *geométrica* de λ , é a dimensão do subespaço $\text{Aut}_T(\lambda)$. Com isso, outro resultado usual é a desigualdade $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$, que tem relação com a possibilidade de *diagonalizar* o operador linear T tratado. Isto é, de encontrar uma base \mathcal{B} tal que $[T]_{\mathcal{B}}$ seja uma matriz diagonal. Pelo Teorema da Diagonalização, T é diagonalizável se, e somente se, (a) $p_T(x)$ se decompõe em fatores lineares e (b) vale a igualdade $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ para cada autovalor λ_i de T . Contudo, no caso da condição (a) ser satisfeita (o que sempre ocorre em $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), porém não a condição (b), uma alternativa à diagonalização se encontra nos *autoespaços generalizados*.

Definição 3. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, $A \in M_n(\mathbb{K})$ e $k \in \mathbb{N}$, definimos as potências de T e A de modo que: $T^0 = I$ e $T^k = T \circ T^{k-1}$, bem como $A^0 = I_n$ e $A^k = A \cdot A^{k-1}$. Sendo λ um autovalor de T , definimos o *autoespaço generalizado associado a λ* como sendo o conjunto $W_T(\lambda) = \{v \in V; (T - \lambda I)^k(v) = 0 \text{ para algum } k \in \mathbb{N}\}$.

Resultado 1. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ distintos tais que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{r_1}(x - \lambda_2)^{r_2} \dots (x - \lambda_m)^{r_m}$. Então, o espaço V pode ser escrito como a seguinte soma direta de subespaços T -invariantes $V = W_T(\lambda_1) \oplus \dots \oplus W_T(\lambda_m)$. Além disso, é válida a igualdade $\dim W_T(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ para todo $i = 1, \dots, m$.*

Veja Coelho e Lourenço (2018) para as definições de soma direta e subespaços T -invariantes e suas relações com as matrizes de operadores lineares, além de Santos (2010) para a demonstração desse resultado. Como notamos, os autoespaços generalizados já se distinguem dos autoespaços porque a dimensão do autoespaço generalizado de λ é sempre igual a $m_g(\lambda)$. Isso implica que a quantidade de autovetores generalizados *linearmente independentes* associados a λ_i é exatamente igual à multiplicidade algébrica de λ_i . Além disso, o fato do espaço V poder ser decomposto em uma soma direta abre caminho para a simplificação de $[T]_{\mathcal{B}}$. O que resta é encontrar uma base que seja favorável para cada $W_T(\lambda)$, a qual encontraremos por meio dos *autovetores generalizados*.

Definição 4. Dado um operador linear $T : V \rightarrow V$, um vetor $v \in V$ não nulo e um autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$ de T , dizemos que v é um *autovetor generalizado de grau m associado a λ* se ocorre que $(T - \lambda I)^m(v) = 0$, mas $(T - \lambda I)^{m-1}(v) \neq 0$.

Note que, como o nome sugere, os autovetores generalizados fornecem um caso mais geral do que os autovetores usuais, afinal, tomando $m = 1$ temos o mesmo caso da Definição 2. A partir daqui, quando houver risco de ambiguidade, os autovetores definidos na Definição 2 serão chamados de *autovetores usuais*. Uma característica pertinente aos autovetores generalizados é a possibilidade de, a partir de um autovetor generalizado, formar um *ciclo* deles de grau decrescente.

Resultado 2. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e seja v_p um autovetor generalizado de grau p de T associado ao autovalor $\lambda \in \mathbb{K}$. É possível obter um autovetor generalizado v_i de grau i associado a λ para cada $i = 1, 2, \dots, p - 1$. O conjunto $\mathcal{B}_{v_p} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ é linearmente independente.*

Demonstração. Tomando $v_{p-1} = (T - \lambda I)(v_p)$, temos:

$$(T - \lambda I)^{p-1}(v_{p-1}) = (T - \lambda I)^p(v_p) = 0, \quad \text{mas } (T - \lambda I)^{p-2}(v_{p-1}) = (T - \lambda I)^{p-1}(v_p) \neq 0. \quad (1)$$

Assim, a partir de v_p , que é de grau p , obtivemos o autovetor generalizado $v_{p-1} = (T - \lambda I)(v_p)$, que é de grau $p - 1$, sendo ambos associados ao autovalor λ . Podemos repetir o mesmo processo p vezes:

$$v_p \xrightarrow{T-\lambda I} v_{p-1} \xrightarrow{T-\lambda I} v_{p-2} \cdots v_1 \xrightarrow{T-\lambda I} 0. \quad (2)$$

Obtemos, com isso, o conjunto $\mathcal{B}_{v_p} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$, em que cada v_i é autovetor generalizado de grau i associado ao mesmo autovalor λ dado. Para mostrar que \mathcal{B}_{v_p} é linearmente independente, basta tomar a combinação linear nula $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_p v_p = 0$ e aplicar $(T - \lambda I)^{p-1}$ em ambos os lados da igualdade para obter $\alpha_p = 0$. Analogamente, obtemos também $\alpha_i = 0$ para os demais escalares. \square

Denominamos o conjunto \mathcal{B}_{v_p} formado em (2) de *cadeia* (ou *ciclo*) de *Jordan gerada por v_p* , onde p é o tamanho da cadeia, o vetor v_p é nomeado de *vetor inicial* e v_1 de *vetor terminal*, que é um

autovetor usual. As cadeias de Jordan, como veremos, tem papel fundamental na composição dos blocos de Jordan na Forma Canônica de Jordan.

Definição 5. Sendo A_1, \dots, A_j matrizes quadradas, denotaremos por $\text{diag}(A_1, \dots, A_j)$ a matriz cuja diagonal é dada sequencialmente pelos blocos A_1, \dots, A_j e os demais elementos são nulos. Além disso, denotaremos por $R_m \in M_m(\mathbb{K})$ a matriz em blocos mostrada a seguir:

$$\text{diag}(A_1, \dots, A_j) = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_j \end{pmatrix} \text{ e } R_m = \begin{pmatrix} 0 & & \\ \vdots & I_{m-1} & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Sendo assim, dados os escalares $\lambda, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ e $m_{ij} \in \mathbb{N}$, definimos o *bloco de Jordan* de ordem m em λ como sendo a matriz $J_m(\lambda) \in M_m(\mathbb{K})$ dada por $J_m = \lambda I_m + R_m$. Uma matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ é uma *matriz de Jordan* se $A = \text{diag}(A_1, \dots, A_j)$, onde cada A_i é, também, uma matriz diagonal em blocos com blocos $J_{m_{ij}}(\lambda_i)$ em sua diagonal e $m_{i1} \geq m_{i2} \geq \dots \geq m_{is}$. Ou seja, a diagonal de cada matriz A_i é formada por blocos de Jordan de um mesmo escalar λ_i , sendo que cada bloco da sequência de blocos de λ_i não cresce quanto à sua ordem. Por fim, quando a matriz de um operador linear é uma matriz de Jordan, dizemos que sua matriz está na *Forma Canônica de Jordan*.

Resultado 3. *Dados um operador linear $T : V \rightarrow V$ e os autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$ de T , temos que*

- (i) *Cada autovetor usual v_{ij} associado a cada λ_i é vetor terminal (podendo ser também vetor inicial) de uma cadeia de Jordan.*
- (ii) *A quantidade de cadeias de Jordan formadas por vetores linearmente independentes é, para cada λ_i , igual à sua multiplicidade geométrica.*
- (iii) *Os autovetores de cada cadeia de Jordan formam a base para um subespaço T -invariante de V . A matriz do operador T restrito a esse subespaço é um bloco de Jordan.*

As demonstrações dos resultados expressos no Resultado 3 podem ser em Santos (2010).

Exemplo 1. Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear e v_3 vetor inicial de uma cadeia de Jordan de tamanho 3 em relação ao autovalor 2. Tomamos o subespaço $U(v_3) \subset V$ que é gerado pela base ordenada $\mathcal{B}_{v_3} = \{v_1, v_2, v_3\}$. Pelo item (iii) do Resultado 3, temos que $U(v_3)$ é um subespaço T -invariante. Sendo $T_{U(v_3)}$ o operador T restrito a $U(v_3)$, observamos que

$$\begin{cases} (T - 2I)(v_1) = 0 \\ (T - 2I)(v_2) = v_1 \\ (T - 2I)(v_3) = v_2 \end{cases} \implies \begin{cases} T(v_1) = 2v_1 \\ T(v_2) = v_1 + 2v_2 \\ T(v_3) = v_2 + 2v_3 \end{cases} \implies [T_{U(v_3)}]_{\mathcal{B}_{v_3}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J_3(2).$$

Ou seja, ao tomarmos a restrição do operador linear T ao subespaço gerado pelos vetores de uma cadeia de Jordan e esses mesmos vetores como base, a matriz desse operador restrito é exatamente um bloco de Jordan. Isso, porém, é apenas uma ilustração do papel de cada cadeia de Jordan na composição da Forma Canônica de Jordan de um operador linear – em realidade, não precisaremos tomar especificamente cada operador restrito de cada cadeia de Jordan, mas apenas lidar com as cadeias em si.

Exemplo 2. Consideremos $V = \mathbb{R}^4$ e $T : V \rightarrow V$ um operador linear tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

para alguma base \mathcal{B} de \mathbb{R}^4 . Com isso, o polinômio característico de T é dado por $p(x) = (x-3)(x-2)^3$, de modo que seus autovalores são $\lambda_1 = 3$ e $\lambda_2 = 2$, ao passo que $\dim W_T(3) = 1$ e $\dim W_T(2) = 3$. Ou seja, são necessárias uma base de um autovetor (generalizado) para $W_T(3)$ e uma base de três autovetores generalizados para $W_T(2)$. Em $W_T(3)$, temos apenas um ciclo de um único autovetor: $v_1 = (1, 0, 0, 1)$. Já em $W_T(2)$, temos dois ciclos, sendo um de tamanho 2, formado por $u_2 = (0, 1, 0, 2)$ e $u_1 = (1, 1, 1, 1)$, e outro de tamanho 1, formado por $w_1 = (1, 0, 0, 0)$. Com isso, o conjunto $\mathcal{C} = \{v_1, u_1, u_2, w_1\}$ é uma base ordenada de \mathbb{R}^4 cuja matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ está na Forma Canônica de Jordan:

$$\begin{cases} T(v_1) = (3, 0, 0, 0) = 3v_1 \\ T(u_1) = (2, 2, 2, 2) = 2u_1 \\ T(u_2) = (1, 3, 1, 5) = u_1 + 2u_2 \\ T(w_1) = (2, 0, 0, 0) = 2w_1 \end{cases} \implies [T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_1(3) & \cdots & 0 \\ \vdots & J_2(2) & \vdots \\ 0 & \cdots & J_1(2) \end{pmatrix}.$$

Exemplo 3. Ilustramos como a Forma Canônica de Jordan e, conseqüentemente, os autoespaços generalizados podem ser utilizados na resolução de sistemas de equações diferenciais lineares. Sendo A uma matriz quadrada, definimos a exponencial de A pela soma infinita

$$e^A = \frac{A^0}{0!} + \frac{A^1}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

Com isso, dado um sistema de n equações em que $f'(t) = Af(t)$, sendo

$$f'(t) = \begin{pmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_n(t) \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix} \in M_{n \times 1}$$

e $A \in M_n(\mathbb{K})$, com o valor inicial $f(0) = t_0 \in \mathbb{K}^n$, teremos a solução (única) dada por $f(t) = e^{At}t_0$. A justificativa dessa solução é dada em Santos (2010).

Duas propriedades que podem ser deduzidas da definição dessa exponencial, como mostrado em Oliveira (2017), são: caso M seja uma matriz invertível, temos $e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^AM$; caso A, B sejam tais que $AB = BA$, temos $e^{A+B} = e^Ae^B$. Junto com o fato de que as matrizes R_m (definidas na Definição 5) são nilpotentes de ordem m , obteremos uma enorme simplificação no cálculo da exponencial de uma matriz de Jordan. Sendo $At = \text{diag}((\lambda_1 I + R_{m_1})t, \dots, (\lambda_j I + R_{m_j})t)$, teremos $e^{At} = \text{diag}(e^{(\lambda_1 I + R_{m_1})t}, \dots, e^{(\lambda_j I + R_{m_j})t})$ em que, para cada $e^{(\lambda I + R)t}$ de ordem k , temos

$$e^{(\lambda I+R)t} = e^{\lambda t} e^{Rt}$$

$$e^{(\lambda I+R)t} = e^{\lambda t} \left(I + Rt + \frac{R^2}{2!}t^2 + \dots + \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1} \right) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{k-3}}{(k-3)!} & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

Dessa forma, no sistema $f'(t) = Af(t)$, podemos identificar a matriz A com a matriz de representação de um operador linear $T : V \rightarrow V$. Ou seja, $A = [T]_{\mathcal{B}}$ para alguma base \mathcal{B} . Caso exista uma base \mathcal{C} tal que $[T]_{\mathcal{C}} = J$ esteja na Forma Canônica de Jordan (o que ocorre se $p_T(x)$ se decompõe em fatores lineares), teremos que $[T]_{\mathcal{B}}$ é semelhante a $[T]_{\mathcal{C}}$, logo $A = PJP^{-1}$, onde P é a *matriz mudança de base* de \mathcal{B} para \mathcal{C} . Com isso, tendo o valor inicial $f(0) = t_0$, a fim de encontrar o fator e^{At} da solução $f(t) = e^{At}t_0$, basta aplicarmos o processo indicado no Exemplo 2 para encontrar $[T]_{\mathcal{C}}$ e, por fim, teremos $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1}$. Como vimos acima, o cálculo de e^{Jt} é reduzido ao cálculo da exponencial de cada bloco de Jordan em sua diagonal, o qual é simplificado de uma soma infinita para uma soma finita.

CONCLUSÕES

O estudo dos autoespaços generalizados aponta uma forma relativamente intuitiva de se obter a Forma Canônica de Jordan de um operador linear, como visto no Exemplo 1 e no Exemplo 2. Essa facilidade reflete diretamente nas aplicações da Forma Canônica de Jordan, como vimos no Exemplo 3. Porém, a obtenção de uma base de autovetores generalizados através de uma cadeia de Jordan envolve, entre outras coisas, determinar o tamanho de cada cadeia, bem como o respectivo vetor inicial. É necessário, então, um aprofundamento nesses aspectos para devida aplicação da relação aqui tratada. Para tanto, sugerimos o tratamento empregado em Santos (2010), o qual, inclusive, é aplicado pelo autor no operador linear do Exemplo 2.

CONTRIBUIÇÕES DOS AUTORES

J.V.P.B contribuiu com a conceitualização, pesquisa e metodologia do projeto. I.S.P atuou com a supervisão do projeto. Ambos os autores contribuíram com a administração do trabalho, bem como sua revisão e edição, e ambos aprovaram a versão submetida.

REFERÊNCIAS

- COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um Curso de Álgebra Linear*. 2. ed. São Paulo: Edusp, 2018.
- LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 9. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2018.
- OLIVEIRA, V. G. B. *Forma de Jordan em sistemas de equações diferenciais lineares*. 63 f. Monografia (Licenciatura Plena em Matemática) — Universidade Federal de Alagoas, Arapiraca, 2017.
- SANTOS, R. J. *Álgebra Linear e Aplicações*. 1. ed. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2010.