

13^o Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2022

Projeto de controladores de realimentação estática da saída baseados em técnicas de alocação de polos

JULIO C.C. DOS SANTOS¹, LEONARDO A. CARNIATO², ALEXANDRE A. CARNIATO³

¹Graduando em Engenharia Elétrica, Bolsista PIBIC, IFSP, Câmpus Presidente Epitácio, julio.c@aluno.ifsp.edu.br.

²Professor no IFSP, Câmpus Presidente Epitácio, leonardo@ifsp.edu.br.

³Professor no IFSP, Câmpus Presidente Epitácio, carniato@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 3.04.05.03-3 Controle de Processos Eletrônicos, Retroalimentação.

RESUMO: Este trabalho apresenta métodos de projeto de controladores com realimentação estática da saída baseados em condições LMIs com ênfase na teoria de Lyapunov para garantir estabilidade robusta de sistemas lineares. Visando compensar as aproximações do modelo real, as incertezas da planta serão consideradas no projeto do controlador. Para aplicações de engenharia, além da análise de estabilidade dos sistemas, pode tornar-se necessário considerar critérios de desempenho, como a taxa de decaimento ou alocação de polos (autovalores). Para realizar as simulações foram utilizados o software MATLAB com auxílio da toolbox YALMIP em conjunto com solver LMILab.

PALAVRAS-CHAVE: CONTROLE ROBUSTO; TEORIA DE LYAPUNOV; LMI.

Design of static output feedback controllers based on pole allocation techniques

ABSTRACT: This work presents methods for designing controllers with static output feedback based on LMIs conditions with emphasis on Lyapunov's theory to ensure robust stability of linear systems. In order to compensate for the approximations of the real model, the plant uncertainties will be considered in the controller design. For engineering applications, in addition to system stability analysis, it may become necessary to consider performance criteria, such as decay rate or pole allocation (eigenvalues). To perform the simulations, the MATLAB software was used with the YALMIP toolbox together with the LMILab solver.

KEYWORDS: ROBUST CONTROL; LYAPUNOV THEORY; LMI.

INTRODUÇÃO

Dentro das técnicas de controle robusto envolvendo a utilização das funções de Lyapunov, pode-se citar as Desigualdades Matriciais Lineares (do inglês "*Linear Matrix Inequalities*" – LMIs) como uma das ferramentas fundamentais para resolução de uma ampla variedade de problemas que surgem na teoria de controle, podendo ser resolvidos de forma muito eficiente utilizando técnicas de programação

convexa (BOYD et al., 1994; GAHINET et al., 1994). Deste modo, a abordagem via LMI possibilita incluir restrições de projeto, oferecendo maior flexibilidade na adição diferentes estratégias de controle e desempenho (CHILALI; GAHINET, 1996).

O controle via realimentação estática da saída é muito útil devido ao baixo custo. Por outro lado, problemas de síntese de tais controladores envolvem a solução de desigualdades matriciais bilineares (do inglês “*Bilinear Matrix Inequalities*” – BMIs) que não são convexos, tornando os problemas de controle de realimentação de saída muito mais difíceis de serem resolvidos quando comparados aos problemas de controle por realimentação de estados (CHANG; JU; ZHOU, 2015).

A realimentação estática de saída está entre os problemas mais importantes na área de controle, durante as últimas décadas diversas abordagens foram propostas para lidar com o problema de estabilidade robusta via realimentação estática da saída (CRUSIUS; TROFINO, 1999; DONG; YANG, 2007; CHANG; JU; ZHOU, 2015).

Deste modo, este trabalho pretende elaborar e estudar teoremas da literatura que visem o projeto, via LMIs, de controladores por meio da realimentação de saída, considerando a taxa de decaimento e alocação de polos, e validar os resultados via simulação.

MATERIAIS E MÉTODOS

Um sistema linear incerto e invariante no tempo pode ser representado no espaço de estados por meio das seguintes equações:

$$\dot{x} = A(\delta)x + B(\delta)u \quad (1)$$

$$y = C(\delta)x + D(\delta)u \quad (2)$$

sendo

$$A(\delta) = \sum_{i=1}^r \delta_i A_i, \quad B(\delta) = \sum_{i=1}^r \delta_i B_i, \quad C(\delta) = \sum_{i=1}^r \delta_i C_i, \quad D(\delta) = \sum_{i=1}^r \delta_i D_i \quad (3)$$

deste modo, δ_i pertence ao simplex unitário, dado por

$$\Lambda_r = \left\{ \delta \in \mathbb{R}^r : \sum_{i=1}^r \delta_i = 1, \delta_i \geq 0, i \in \mathbb{K}_r \right\} \quad (4)$$

sendo $r = 2^N$ o número de vértices do politopo e N é o número de incertezas da planta.

Considerando o sistema descrito por (1) e (2), a lei de controle de realimentação de saída é definida por

$$u = Ly = LC(\delta)x \quad (5)$$

sendo L o ganho constante de realimentação de saída.

Deste modo, o sistema em malha fechada é definido por

$$\dot{x} = (A(\delta) + B(\delta)LC(\delta))x \quad (6)$$

$$y = (C(\delta) + D(\delta)LC(\delta))x \quad (7)$$

A partir do trabalho apresentado por (CHANG; JU; ZHOU, 2015), o teorema proposto a seguir fornece as condições LMI para sistemas lineares com incertezas politópicas com inserção de taxa de decaimento mínima (BOYD et al., 1994). Vale ressaltar que a notação $(*)$ denota simetria na matriz e $He(A) = A + A'$

Teorema 1. Considere o sistema incerto (6) e (7), com a lei de controle (5). Supondo a existência das matrizes $Q_j = Q'_j > 0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $U \in \mathbb{R}^{q \times q}$, $V \in \mathbb{R}^{m \times q}$ e o escalar $\beta > 0$, tais que

$$\Omega_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (8)$$

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} < 0, \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (9)$$

onde

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} He(A_i Q_j + B_i V F_j) + 2\alpha Q_j & * \\ \beta V' B'_i + C_i Q_j - U F_j & -\beta(U + U') \end{bmatrix} \quad (10)$$

então, segundo a teoria de Lyapunov, a origem do sistema é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável sujeito a taxa de decaimento mínima α , com a lei de controle (5) sendo $L = VU^{-1}$.

Demonstração: A partir de (4), (10) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} He(A(\delta)Q(\delta) + B(\delta)V\mathcal{F}) + 2\alpha Q(\delta) & * \\ \beta V' B(\delta)' + C(\delta)Q(\delta) - U\mathcal{F} & -\beta(U + U') \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

Aplicando o Lema 3 presente em Chang, Ju e Zhou (2015), e considerando que $\mathcal{A} = U^{-1}C(\delta)Q(\delta) - U^{-1}U\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}' = V'B(\delta)'$ obtém-se

$$\begin{aligned} A(\delta)Q(\delta) + Q(\delta)A(\delta)' + B(\delta)V\mathcal{F} + \mathcal{F}'V'B(\delta)' + 2\alpha Q(\delta) + Q(\delta)C(\delta)'U^{-1}V'B(\delta)' \\ - \mathcal{F}'U'U^{-1}V'B(\delta)' + B(\delta)VU^{-1}C(\delta)Q(\delta) - B(\delta)VU^{-1}U\mathcal{F} < 0 \end{aligned} \quad (12)$$

Fazendo $L = VU^{-1}$ e simplificando a expressão

$$A(\delta)Q(\delta) + Q(\delta)A(\delta)' + Q(\delta)C(\delta)'L'B(\delta)' + B(\delta)LC(\delta)Q(\delta) + 2\alpha Q(\delta) < 0 \quad (13)$$

Substituindo $Q(\delta) = P(\delta)^{-1}$ e rearranjando tem-se

$$P(\delta)(A(\delta) + B(\delta)LC(\delta)) + (A(\delta) + B(\delta)LC(\delta))'P(\delta) + P(\delta)2\alpha < 0 \quad (14)$$

Considerando a função candidata de Lyapunov $V = x'P(\delta)x$, pré e pós multiplicando (14) por x' e x respectivamente, tem-se que

$$x'P(\delta)(A(\delta) + B(\delta)LC(\delta))x + x'(A(\delta) + B(\delta)LC(\delta))'P(\delta)x + x'P(\delta)x2\alpha < 0 \quad (15)$$

Substituindo $V = x'P(\delta)x$ e (6) em (15) obtém-se

$$x'P(\delta)\dot{x} + \dot{x}'P(\delta)x + 2\alpha V(x) < 0 \quad (16)$$

Portanto, substituindo a derivada da função candidata de Lyapunov em (16) e rearranjando

$$\dot{V}(x) < -2\alpha V(x) \quad (17)$$

que segundo Boyd et al. (1994) estabelece um limite inferior α para a taxa de decaimento, e assim a demonstração está concluída.

Para obter um controlador que garanta estabilidade e forcem a localização dos autovalores em malha

fechada em uma determinada região do plano complexo, o trabalho de Behrouz, Mohammadzaman e Mohammadi (2019) trás condições suficientes para alocação dos polos nas regiões de interesse, tais como o critério da taxa de decaimento, alocação de polos dentro de uma faixa vertical e a estabilidade cônica, que garante um ângulo θ máximo para os autovalores.

Deste modo, o Teorema 2 fornece as condições suficientes para obtenção de um controlador de realimentação da saída com alocação de polos.

Teorema 2. (BEHROUZ; MOHAMMADZAMAN; MOHAMMADI, 2021) Considerando o sistema incerto em malha fechada (6) e (7), dadas as matrizes conhecidas $\bar{\alpha}$ e $\bar{\beta}$ que determina a região desejada do plano complexo, e um escalar β que garanta a existência das matrizes $Q_j = Q'_j > 0$, U e V

$$\Omega_{ii} < 0, \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (18)$$

$$\Omega_{ij} + \Omega_{ji} < 0, \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, \dots, r \quad (19)$$

onde

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \otimes Q_j + He(\bar{\beta} \otimes (A_i Q_j + B_i V F)) & * \\ \beta I \otimes V' B'_i + \bar{\beta} \otimes (C_i Q_j - U F) & -\beta I \otimes (U + U') \end{bmatrix}, \quad (20)$$

sendo que \otimes representa o produto de Kronecker. Deste modo, o controlador de realimentação de saída é dado por $L = VU^{-1}$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considere o sistema incerto hipotético, apresentado em Chang, Ju e Zhou (2015), com $0,57 \leq \sigma \leq 2,43$, descrito a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} -2,98 & \sigma & 0 & -0,034 \\ -0,99 & -0,21 & 0,035 & -0,0011 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,39 & -5,555 & 0 & -1,89 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0,0032 \\ 0 \\ 0 \\ 1,6 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = 0 \quad (21)$$

Para garantir a estabilidade do sistema por meio de um ganho de realimentação de saída L , é possível utilizar Teorema 1. A Figura 1 (a) ilustra os autovalores dos vértices para o sistema realimentado, sem restrição para a taxa de decaimento ($\alpha = 0$). Neste caso obteve-se um ganho do controlador de saída $L = [-0,7547 \quad -0,7666]$ (para $\beta = 1$). Utilizando o Teorema 2 para realocação de polos visando melhorar o desempenho deste sistema em regimes transitórios, neste caso, definiu-se que a parte real dos autovalores fique entre -5 e $-0,5$ e o ângulo máximo em 40° . Deste modo, obteve-se o controlador de saída $L = [-1,3387 \quad -0,6350]$. A Figura 1 (b) ilustra os novos polos para os vértices do sistema incerto.

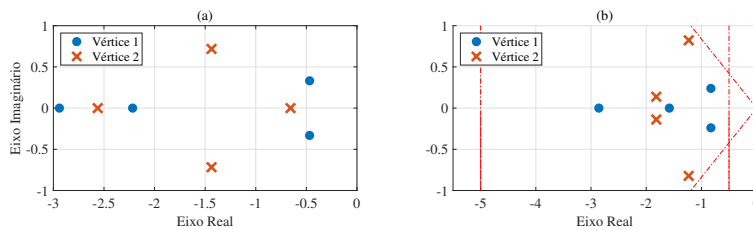


Figura 1: Autovalores dos vértices para o sistema incerto em malha fechada (a), e autovalores dos vértices para o sistema realimentado conforme o critério de alocação de polos (b).

Como pode-se observar na Figura 2, os autovalores dos dois vértices estão dentro da região especificada, portanto, é garantido que os autovalores deste sistema hipotético realimentado permanecerão dentro desta região para qualquer valor de σ .

CONCLUSÕES

Por meio das condições propostas por Chang, Ju e Zhou (2015), que fornecem condições menos conservadoras que outros trabalhos presentes na literatura, este trabalho introduz o Teorema 1 que é uma generalização considerando a taxa de decaimento como índice de desempenho.

A partir dos Teoremas propostos por Behrouz, Mohammadzaman e Mohammadi (2021) foi possível estudar e aplicar as LMIs que fornecem condições suficientes para obtenção de um controlador de realimentação de saída que aloque os autovalores em uma determinada região do plano complexo.

Portanto, por meio dos exemplos numéricos apresentados, os teoremas apresentados neste trabalho mostram-se eficientes no que tange o projeto de controladores estáticos dependentes da saída. Assim como a utilização de formulação LMI baseada na teoria de Lyapunov, que pode ser generalizada de diversas maneiras de modo a garantir diferentes critérios de desempenho.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelos suportes financeiros para o desenvolvimento do presente trabalho.

REFERÊNCIAS

- BEHROUZ, H.; MOHAMMADZAMAN, I.; MOHAMMADI, A. Robust static output feedback design with pole placement constraints for linear systems with polytopic uncertainties. *Transactions of the Institute of Measurement and Control*, 2019.
- BEHROUZ, H.; MOHAMMADZAMAN, I.; MOHAMMADI, A. Static output feedback h_2/h_∞ control synthesis with pole placement constraints: An lmi approach. *Int. J. Control Autom. Syst.*, 2021.
- BOYD, S. et al. *Linear matrix inequalities in system and control theory*. [S.l.]: SIAM, 1994.
- CHANG, X.-H.; JU, H.; ZHOU, J. Robust static output feedback H_∞ control design for linear systems with polytopic uncertainties. *Systems & Control Letters*, v. 85, p. 23–32, 11 2015.
- CHILALI, M.; GAHINET, P. H_∞ design with pole placement constraints: an lmi approach. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, v. 41, p. 358 – 367, 03 1996.
- CRUSIUS, C. A.; TROFINO, A. Sufficient lmi conditions for output feedback control problems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, IEEE, v. 44, n. 5, p. 1053–1057, 1999.
- DONG, J.; YANG, G.-H. Static output feedback control synthesis for linear systems with time-invariant parametric uncertainties. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 52, n. 10, p. 1930–1936, 2007.
- GAHINET, P. et al. The lmi control toolbox. In: *Proceedings of 1994 33rd IEEE Conference on Decision and Control*. [S.l.: s.n.], 1994. v. 3, p. 2038–2041 vol.3.