

12º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2021

Modelagem matemática aplicada a circuitos elétricos

MILENA MENEZES DE OLIVEIRA¹, BRUNA GONÇALVES DE LIMA², RODRIGO CLEBER DA SILVA³

¹Graduando em Engenharia Elétrica, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus Votuporanga, milena.m@aluno.ifsp.edu.br.

²Doutora em Engenharia Elétrica, Docente, IFSP, Câmpus Votuporanga, bruna.glv.lima@ifsp.edu.br.

³Doutor em Engenharia Elétrica, Docente, IFSP, Câmpus Votuporanga, rcleber@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.04.00-3 Matemática Aplicada.

RESUMO: De um modo geral, a matemática é amplamente utilizada em cursos de ciências exatas e bastante aplicada como ferramenta de tomada de decisão para resolver problemas da vida diária. Para circuitos elétricos não é diferente, porque a análise matemática é necessária para resolver o problema. O objetivo deste projeto de iniciação científica é demonstrar a resolução do circuito por meio de modelagem matemática usando Equações Diferenciais Ordinárias (EDO). Para fins de demonstração, será utilizado um circuito RC, no qual será realizada a modelagem matemática e sua aplicação em filtros passivos, mais especificamente um filtro passa-baixa. Para isso, será utilizado o software PSIM para realizar a simulação. Portanto, pode-se verificar o objetivo principal deste estudo, ou seja, através de sua equação, é possível observar o decaimento exponencial do capacitor devido à reatância capacitiva da tensão de retardo em relação à corrente.

PALAVRAS-CHAVE: Circuitos elétricos; Circuito RC; EDO; Filtro Passa-baixa.

Mathematical modeling applied to electrical circuits

ABSTRACT: In general, mathematics is widely used in exact science courses and widely applied as a decision-making tool to solve problems in daily life. For electrical circuits it is no different, because mathematical analysis is needed to solve the problem. The objective of this scientific initiation project is to demonstrate the circuit resolution through mathematical modeling using Ordinary Differential Equations (ODE). For demonstration purposes, an RC circuit will be used, in which the mathematical modeling and its application in passive filters will be performed, more specifically a low-pass filter. For this, the PSIM software will be used to perform the simulation. Therefore, the main objective of this study can be verified, that is, through its equation, it is possible to observe the exponential decay of the capacitor due to the capacitive reactance of the delay voltage in relation to the current.

KEYWORDS: Electric circuits; RC circuit; ODE; Low Pass Filter.

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais modelam inúmeros problemas das diferentes áreas das exatas, sendo frequentemente definidas como o principal elo que conecta o problema real à uma descrição matemática que se possa trabalhar. (ALEXANDER; SADIKU, 2013)

Em Engenharia Elétrica, encontram-se aplicações dessas equações para vários tipos de circuitos elétricos envolvendo os seus componentes (resistores, indutores e capacitores). Em particular, o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) pode ser usado para resolver a lei de Kirchhoff que é aplicada à resolução de circuitos elétricos (BOYCE; DIPRIMA, 2012). Para modelar as características tensão-corrente de capacitores e indutores, por exemplo, as EDO's são usadas na análise de circuitos e sua resolução define a mudança dinâmica da variável corrente-tensão ao longo do tempo em cada componente do circuito (CAMPONOGARA, 2016.).

A modelagem de circuitos elétricos por meio de EDO's pode ainda determinar a influência que a frequência pode exercer sobre eles, porém, de uma maneira mais simplificada. O modelo no qual será proposto neste trabalho trata-se de desenvolver as EDO's elementares de modo que seja possível realizar o cálculo dos nós, das malhas ou dos ramos de um circuito, considerando o efeito da frequência em circuitos de correntes alternadas.

A representação utilizará diversas ferramentas matemáticas na área da Álgebra Linear e Cálculo Diferencial, como por exemplo, no desenvolvimento de equações homogêneas e não homogêneas aplicadas ao problema estudado. Com isto, espera-se que seja possível aplicar a teoria no estudo de filtros passivos de forma que a simulação possa demonstrar o comportamento do circuito em diferentes frequências.

MATERIAIS E MÉTODOS

Segundo (DORF; SVOBODA, 2016), "circuito elétrico é um conjunto de componentes elétricos ligados entre si de modo a formar um percurso fechado através do qual pode circular uma corrente".

Circuito RC (Resistivo-Capacitivo) é composto por um fonte de tensão, $v_i(t)$, em série com um resistor R e um capacitor C .

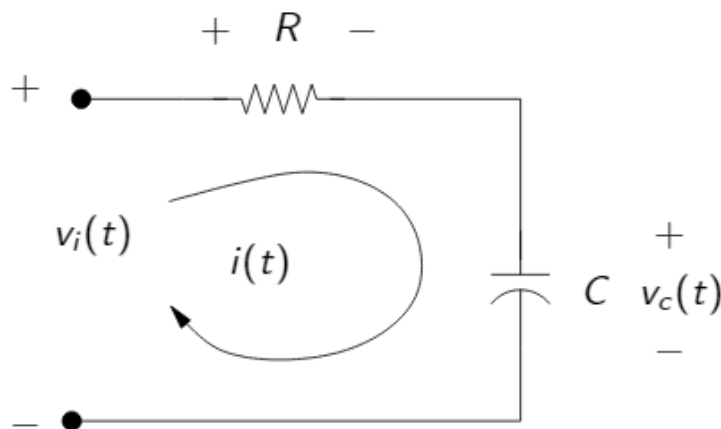


Figura 1: Circuito Resistivo-Capacitivo (RC).

Segundo (ALEXANDER; SADIKU, 2013), corrente no capacitor é proporcional à taxa de variação da tensão ou através do capacitor

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} \quad (1)$$

sendo a capacitância C a constante de proporcionalidade.

De acordo com a lei de Kirchhoff, a soma das quedas dos potenciais ao longo da malha deve ser nula

$$v_i(t) - Ri(t) - v_c(t) = 0 \quad (2)$$

Substituindo $i(t)$ na equação (2), aparece uma equação diferencial de primeira ordem

$$v_i(t) - RC \frac{dv_c(t)}{dt} - v_c(t) = 0$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}v_c(t) + \frac{1}{RC}v_i(t) \quad (3)$$

Se considerado um caso onde $v_i(t)=0$ para todo t , $v_c(0) =$ descarga do capacitor.

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = -\frac{1}{RC}v_c(t)$$

$$\frac{dv_c(t)}{v_c(t)} = -\frac{dt}{RC} \quad (4)$$

Aplicando a integral nos dois lados da equação (4) podemos obter uma solução analítica como mostra a equação (5)

$$\int_{t=0}^T \frac{dv_c(t)}{v_c(t)} = \int_{t=0}^T -\frac{dt}{RC}$$

$$\ln v_c(t) = -\frac{t}{RC} + K \quad (5)$$

Portanto, a partir da equação (5), concluímos que a tensão no capacitor decresce exponencialmente na taxa inversa de RC

$$v_c(t) = e^{-\frac{t}{RC} + K} = e^K e^{-\frac{t}{RC}}$$

$$v_c(t) = v_c^0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (6)$$

O filtro passa-baixa é constituído por um circuito RC-Série em que a tensão de saída é a do capacitor. Esse circuito é visto na Figura (2).

As ondas senoidais de baixa frequência, tem o valor de reatância capacitiva mais alto que o valor da resistência. Sendo assim, a tensão de saída é na verdade, igual à tensão de entrada. Já para frequências altas, a reatância capacitiva tem valores mais baixos se comparado com o valor da resistência, assim, atenuando a tensão de saída para um valor praticamente nulo. Portanto, o filtro faz a passagem de sinais de frequências baixas, e por isso é chamado filtro passa-baixa (BOYLESTAD; NASHELSKY, 1984).

Quando em determinada frequência a reatância capacitiva for igual a resistência, a tensão de saída será igual à tensão no resistor e, quando somados obtêm-se a tensão de entrada.

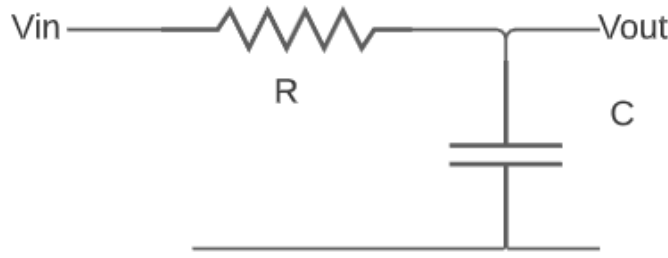


Figura 2: Filtro passa-baixa.

A frequência de corte de um filtro passa-baixa é dada pela equação (7).

$$F_c = \frac{1}{2\pi RC}. \quad (7)$$

A frequência de corte também é definida como a frequência na qual o sinal é atenuado. O sinal de saída é cerca de 70% da intensidade do sinal de entrada, pois o valor da atenuação sofrida é aproximadamente de 30%.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para o Circuito RC série foi escolhido um resistor tem $10K\Omega$, um capacitor de $10nF$ e a fonte foi ajustada para $1KHz$, esse circuito foi apresentado dá seguinte maneira na ferramenta de simulação PSIM conforme a Figura (3).

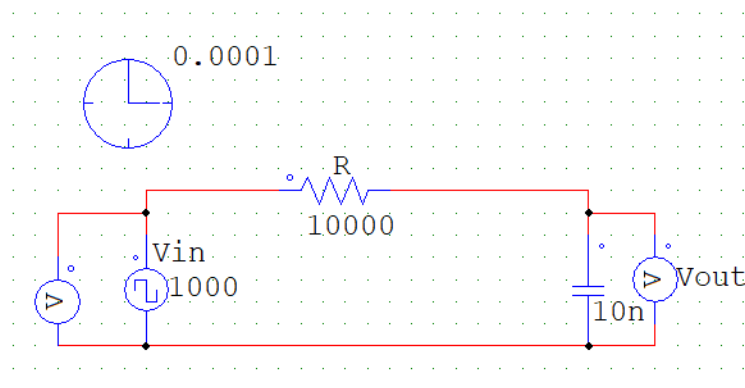


Figura 3: Circuito (RC).

Aplicando os valores usado no PSIM na equação (6), temos

$$F_c = \frac{1}{2\pi 10K.10n} = 1591.55Hz \quad (8)$$

A Figura (4) abaixo mostra as formas de ondas do circuito RC série

A tensão da fonte V_{in} é representada pela onda vermelha e a tensão no capacitor é dada pela onda azul, também chamada de V_{out} . Nota-se que a tensão da fonte liga instantaneamente, ou seja, sai do absoluto zero até chegar na sua tensão de pico 1, enquanto a tensão no capacitor demora para atingir o mesmo pico, isso acontece porque a reatância capacitiva atrasa a tensão em relação à corrente.

Esse circuito se comporta da seguinte maneira, quando a onda de entrada atinge o pico máximo

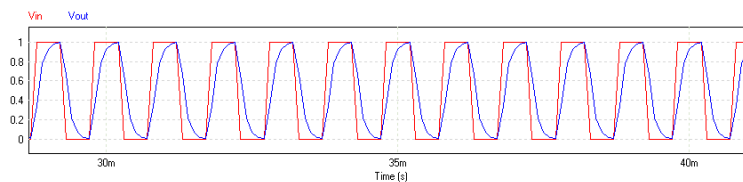


Figura 4: Formas de ondas do circuito RC série.

(tensão V_{in}) o capacitor começa a carregar (tensão V_{out}) e quando a onda de entrada atinge zero o capacitor começa a descarregar e assim o ciclo se repete.

Analisando o comportamento dessas ondas por aspecto de frequência pode-se verificar o desempenho do filtro passa-baixa, que é diferente da onda de entrada, onda quadrada. Se decompormos a onda de entrada, teremos senos e cossenos infinitos. Quando na forma de onda de saída, a tensão no capacitor, observa-se que a forma não é mais quadrada porque o filtro já está funcionando e filtrando altas frequências. Nesse caso, frequências superiores a $1591,55\text{Hz}$, ou seja, alta frequência não pode passar pelo circuito RC, o que causa a atenuação do sinal.

CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo aplicar Equações Diferenciais Ordinárias à modelagem de circuitos elétricos. A partir dos resultados obtidos, pôde-se concluir sobre a importância do desenvolvimento teórico para a análise do circuito RC. A modelagem matemática desenvolvida foi satisfatória para a compreensão do comportamento do capacitor e também na análise de filtros passivos, os quais permitem que as baixas frequências passem facilmente e atenuam a amplitude das frequências superiores à frequência de corte. Conclui-se também que o modelo matemático utilizado neste trabalho produz uma equação de descarga do capacitor e ao simular o circuito RC foi possível visualizar a retirada das componentes de alta frequência do sinal de entrada mostrando o decaimento exponencial do capacitor.

REFERÊNCIAS

- ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. *Fundamentos de circuitos elétricos*. [S.l.]: AMGH Editora, 2013.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*, 9a edição. *Rio de Janeiro*, 2012.
- BOYLESTAD, R. L.; NASHELSKY, L. *Dispositivos eletrônicos e teoria de circuitos*. [S.l.]: Prentice-Hall do Brasil, 1984. v. 6.
- CAMPONOGARA, E. *Modelagem de sistemas dinâmicos*. *Departamento de automação e sistemas, UFSC*, 2016.
- DORF, R. C.; SVOBODA, J. A. *Introdução aos circuitos elétricos*. [S.l.]: Grupo Gen-LTC, 2016.