12º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2021

CONSTRUÇÃO E ANÁLISE DE CONJUNTOS DE JULIA POR MEIO DO SOFTWARE GEOGEBRA

Giovana Cavallin de Melo[1], Rachel Mariotto[2]

[1] Discente do Curso Técnico em Administração Integrado ao Ensino Médio, IFSP, Câmpus Birigui, giovana.cmel@gmail.com
[2] Docente do Instituto Federal de São Paulo, Câmpus Birigui, rmariotto@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.00.00-8 Matemática

RESUMO: A geometria fractal é um ramo matemático que aborda figuras complexas, nomeadas fractais, cuja principal característica é a autossimilaridade. O objetivo deste artigo é apresentar os fractais nomeados de Conjuntos de Julia, que são gerados por uma relação de recorrência de uma função complexa. À vista disso, serão construídas tais figuras utilizando o software GeoGebra, a fim de facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos por trás de figuras tão admiradas e incompreendidas. O artigo irá expor também propriedades a respeito dos Conjuntos de Julia.

PALAVRAS-CHAVE: Fractais; geometria fractal; números complexos; relação de recorrência.

BUILD AND ANALYSIS OF JULIA SETS THROUGH THE GEOGEBRA SOFTWARE

ABSTRACT: Fractal geometry is a mathematical branch that addresses complex figures, named fractals, whose main characteristic is self-similarity. The aim of this article is to present the fractals named Julia Sets, which are generated by a recurrence relation of a complex function. In view of this, such figures will be constructed using the GeoGebra software, in order to facilitate the understanding of the mathematical concepts behind such admired and misunderstood figures. The article will also present properties related to Julia Sets.

KEYWORDS: Fractals; fractal geometry; complex numbers; recurrence relationship.

INTRODUÇÃO

Os fractais são objetos geométricos que, durante muito tempo, eram vistos como um mistério para a matemática. Pertencentes a geometria não-euclidiana, os fractais são caracterizados por sua autossimilaridade, ou seja, a característica de cada parte remeter ao todo da figura, variando apenas sua escala; a complexidade infinita, definida pelo padrão sem fim na qual são construídos; a irregularidade que representa sua fronteira curva ou seu interior não preenchido completamente; e por último a sua dimensão não inteira.

De acordo com Rabay (2013), diversos matemáticos, entre eles Georg Cantor (1845-1918), David Hilbert (1862-1943), Niels Koch (1870-1924), Waclaw Sierpinsk (1882-1969) e Gaston Julia (1893-1978), contribuíram para a compreensão e criação dos fractais, entretanto, só foram oficializadas pelo matemático Benoit Mandelbrot (1924-2010). Em seu trabalho publicado em 1975, Mandelbrot usufruiu do avanço computacional para estabelecer a Geometria Fractal, pois somente com tal desenvolvimento tecnológico foi possível a visualização e melhor compreensão destas figuras. Hodiernamente, por meio da contribuição de estudiosos do assunto, Rabay (2013) e Fuzzo (2009) classificam os fractais da seguinte forma: fractais definidos por funções iteradas, fractais aleatórios e fractais por relação de recorrência, sendo os principais exemplos deste tipo os Conjuntos de Julia e o Conjunto de Mandelbrot.

Os fractais por relação de recorrência são gerados por meio de uma função polinomial, só sendo possível sua representação no plano por meio de computadores que possibilitam uma recorrência quase infinita e variados detalhes. Os fractais pertencentes a esse grupo são formados mediante a função complexa $z_{n+1} = {z_n}^2 + c$, em que $z \in \mathbb{C}$ é uma variável, enquanto $c \in \mathbb{C}$ é uma constante, sendo $\mathbb{C} = \{a + bi\ / a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Este artigo terá como objetivo apresentar algumas características dos Conjuntos de Julia no GeoGebra.

MATERIAL E MÉTODOS

Para a realização desse trabalho foi realizado um estudo sistemático sobre os fractais por relação de recorrência e o conjunto de Julia. Paralelo a esse estudo, houve também uma concentração na compreensão dos conteúdos matemáticos, como o Conjunto dos Números Complexos, necessários para o entendimento desses fractais.

Na formação das imagens e para um melhor entendimento das propriedades desses fractais foi utilizado os softwares ChaosPro e GeoGebra[1], que são softwares gratuitos, sendo o primeiro próprio para a criação de fractais e o último com uma abordagem focada nos conceitos matemáticos por trás das figuras.

Um método para a construção de imagens no GeoGebra teve como base o trabalho de Hoyos e Machado (2019).

Construção no GeoGebra

- A princípio, deve-se clicar na opção de “controle deslizante”, programando-o com valor mínimo e máximo de, respectivamente, -2 e 2, com incremento de 0,01. Este controle deslizante servirá para variar a parte real dos z_0 que comporão o conjunto.
- A seguir, deve-se abrir a opção de “planilha” e na célula A1, digitar o valor 0. Na célula A2, digite a fórmula A1+1. Utilizando da tática de copiar e colar disponibilizada pelo GeoGebra, selecione a célula A2 e arraste verticalmente até a célula A101. Os valores de 0 à 100 na coluna A servirão como parâmetro no eixo imaginário, ou seja, comporão a dimensão do conjunto produzido, que será de 0 a i no eixo vertical; dependendo do valor de c escolhido, é necessário aumentar a contagem de números, indo até completar 130 ou 150.
- Na coluna B, serão determinados os valores de z_0, por isso, na célula B1 digite (a,A1/100), sendo a o valor determinado pelo controle deslizante e A1/100 os variados valores que integrarão a parte imaginária de z. Com o comando realizado, selecione a opção “Propriedades” e na aba “básico” desmarque a opção de exibir rótulo se estiver acionada; em seguida, vá para a aba “estilo” e coloque 3 como tamanho do ponto; por último, selecione a aba “álgebra” e escolha a coordenada de número complexo. Com essas ações executadas, feche as propriedades da célula, selecione-a e arraste-a verticalmente até B101.
- Agora na coluna C, será adicionada a função geradora do conjunto. Para isso, digite B1^2+c; o c será substituído pelo valor escolhido por você, ou seja, utilizando de $c = -0{,}1 + 0{,}658i$, seria digitado B1^2-0,1+0,658i. Depois de terminado, abra novamente a opção propriedades da célula e desmarque as opções “Exibir rótulo” e “Exibir objeto”. Com isso feito, arraste novamente até a célula C101. Com as células C1 a C101 ainda selecionadas, arraste até a coluna Z, de forma a completar toda a tabela de C1 a Z1, indo até a linha 101. As células preenchidas agora serão as iterações da função com o z_0 estabelecido na coluna B.
- Na coluna AA, será feita a parte pertencente ao terceiro e quarto quadrante. Em razão disso, digita-se na célula AA1 (-a,-(A1/100)), se o c for um número imaginário ou imaginário puro, e Reflexão(B1,EixoX) se o c contiver apenas a parte real do número complexo. Após essa ação, selecionar a célula AA1 e abrir a opção de propriedades e, novamente, desmarcar a opção “Exibir rótulo” e marcar “Exibir rastro”; em “estilo” coloque 3 como o tamanho do ponto; em “álgebra” marque números complexos nas coordenadas; e por último, em “avançado”, digite o código “Se[abs(Z1)<=2,0,1]” em vermelho, verde ou azul, dependendo da cor que preferir para indicar os pontos cuja órbita do ponto é ilimitada, lembrando de colocar 0 nas outras cores. Depois, selecione a célula e arraste até AA101.

---

[1] É possível obter tais softwares, respectivamente, em: http://www.chaospro.de/download.php e https://www.geogebra.org/.

- Volte para a coluna B, selecione a célula B1 e abra as propriedades e repita o processo feito em "avançado" para determinar as cores do conjunto; em "básico" acione a opção "Exibir rastro". Com tudo concluído, feche as propriedades, selecione a célula B1 e arraste até B101.
- Para concluir, anime o controle deslizante e coloque-o em uma velocidade em que não haja espaços em branco, preferencialmente 0,75x ou 0,35x. Assim, o segmento formado pelo conjunto de pontos das colunas B e AA passarão pelo espaço do plano e marcarão de preto todos os pontos cujo $|z| \leq 2$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os conjuntos de Julia foram desenvolvidos pelo matemático francês Gaston Maurice Julia (1893-1978) que se baseou no trabalho "The Newton-Fourier imaginary problem" de Arthur Cayley (1821-1895), onde este matemático britânico estudava as propriedades da função complexa $f(z) = z^3 + c$, sendo z uma variável pertencente aos números complexos e c uma constante do mesmo conjunto. A partir dos trabalhos de Cayley, Julia estudou diversas funções polinomiais, entretanto, para a formação dos Conjuntos de Julia, utiliza-se prioritariamente a função complexa $f_c(z) = z^2 + c$, seguindo os mesmos parâmetros de Cayley para as incógnitas z e c. Julia publicou o conhecimento dessas figuras em seu primeiro trabalho em 1918. (HOYOS; MACHADO, 2019)

De forma concisa, pode-se definir estes conjuntos como a coleção de pontos cuja órbita – série de pontos composta pelos resultados de cada iteração da função – é limitada, ou seja, se restringe a um determinado intervalo ao invés de tender ao infinito, e estão próximos – possuem valores similares – de outros em que o oposto ocorre. (MIRANDA, 2012) Hoyos e Machado (2019) apresentam uma separação para os conjuntos de Julia, classificando como J_c a fronteira desses pontos específicos, considerando como fronteira o limite dos pontos pertencentes ao conjunto, e como K_c o conjunto de Julia preenchido, ou seja, tanto a fronteira como aqueles em seu interior.

Inicialmente, precisa-se ter ciência de que por meio de diversos estudos realizados foi constatado que os pontos pertencentes a esses conjuntos se localizam dentro do intervalo complexo $[2, -2]$, ou seja, para se obter pontos cuja órbita seja limitada é necessário que $|z| \leq 2$ e $|c| \leq 2$, caso contrário, as órbitas serão ilimitadas.

Em síntese, pode-se dizer que para a formação dos Conjuntos de Julia é necessário iterar inúmeros valores de z_0 para uma constante c pré-determinada, sendo essa constante a responsável pela forma que o fractal irá assumir. A seguir, serão apresentados alguns exemplos de Conjuntos de Julia para diversos valores de c.

Utilizando da função complexa $f_c(z) = z^2 + c$, com $c = 0$, ou seja, $f_0(z) = z^2 + 0$, obtém-se o conjunto demonstrado na figura 1.

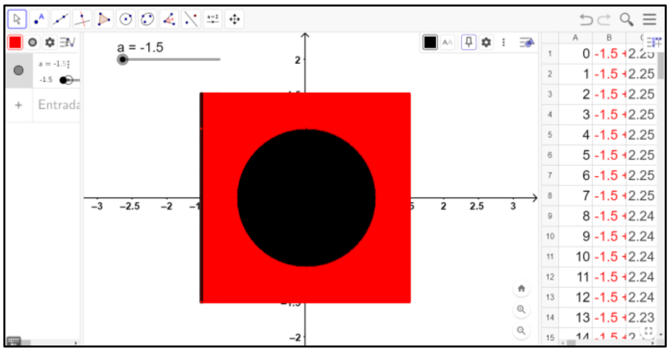

FIGURA 1. Conjunto de Julia, $c = 0$ (elaborado pela autora no software GeoGebra)

Isso ocorre, pois, como $c = 0$, a função itera apenas o número z, assim, a órbita desse ponto é $\left(z, z^2, z^4, z^8, \ldots, z^{2^n}\right)$. Relembrando que z, por ser um número complexo, possui seu tamanho representado por $|z|$. Assim, para $f_0(z) = z^2 + 0$, observa-se que, os pontos iniciais em que $|z| > 1$ terão órbita ilimitada e não pertencerão ao conjunto; entretanto, aqueles cujo $|z| < 1$ terão órbita entre $[z, 0]$ e pertencerão ao conjunto K_c, visto que serão os responsáveis por preencherem a circunferência; e por fim, aqueles pontos cujo $|z| = 1$ serão pontos fixos e farão parte de J_c, sendo a circunferência do Conjunto de Julia. (HOYOS; MACHADO, 2019)

Quando iteramos a mesma função complexa com $c \neq 0$, os Conjuntos de Julia elaborados apresentam propriedades diversas. A seguir, serão retratadas estas características presentes nos fractais com valores diversos de c, retratando os conjuntos construídos no GeoGebra e posteriormente no ChaosPro, no intuito de demonstrar os detalhes dos objetos em um software próprio para sua construção.

1ª Característica

Ao analisar a figura 2, item (a) e (b) com (c) e (d) percebe-se que possuem formato congruente, com diferenciação apenas no seu lado de formação. Tal característica ocorre devido ao valor similar de c que compõe ambas, isto é, a diferenciação dessa constante é dada na localização do valor imaginário do número, sendo este positivo ou negativo. Logo, o experimento sugere que se a parte imaginária do número for positiva, a inclinação da figura será para o lado esquerdo, tendo o auge de seu formato no segundo e quarto quadrante do plano complexo, entretanto, se o mesmo for negativo, a figura se inclinará para o lado direito, se desenvolvendo, principalmente, no primeiro e terceiro quadrante.

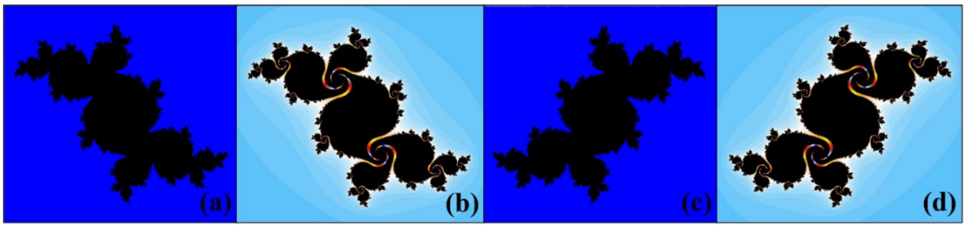

FIGURA 2. Conjuntos de Julia, com $c = -0{,}1 + 0{,}658i$ (a) e (b) e $c = -0{,}1 - 0{,}658i$ (c) e (d) (elaborados pela autora, respectivamente, nos softwares GeoGebra e ChaosPro)

2ª Característica

Está presente no Conjunto de Julia seu caráter conexo ou desconexo. Devido a geração do Conjunto de Mandelbrot pela mesma função quadrática complexa, é possível encontrar diversos Conjuntos de Julia integrando tal fractal, de forma que se nomeia de conexos aqueles conjuntos que em seu centro possuem ligação de pontos, como evidenciado na figura 2 e 4. Em contrapartida, aqueles que não pertencem ao interior do Conjunto de Mandelbrot são nomeados de desconexos – figura 3 – e não possuem interligação de pontos em seu centro. Contudo, os conjuntos desconexos apresentados no trabalho são gerados perto do Conjunto de Mandelbrot, por isso apresentam aglomerados de pontos interligados. Deduz-se então que, quanto mais distantes forem as coordenadas da constante c do interior do Conjunto de Mandelbrot, mas distanciados estarão os pontos que comporão o Conjunto de Julia.

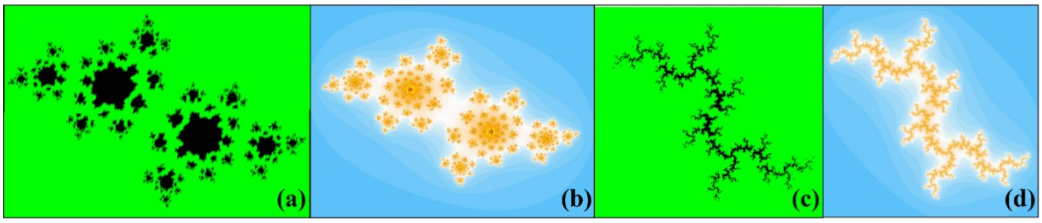

FIGURA 3. Conjuntos de Julia, com $c = -0{,}6 + 0{,}5i$ (a) e (b) e $c = 0{,}8i$ (c) e (d) (elaborados pela autora, respectivamente, nos softwares GeoGebra e ChaosPro)

3ª Característica

Em relação a simetria dos Conjuntos de Julia, percebe-se que, aqueles cujo c possui apenas parte real – figura 4 -, há uma reflexão, ou seja, uma simetria em relação ao eixo real, onde a parte superior é congruente a parte inferior ou em relação ao eixo imaginário, onde cada lado da figura se coincide. Entretanto, os conjuntos formados com um valor de c sendo um número imaginário ou imaginário puro – figuras 2 e 3 -, possuem simetria rotacional, ou seja, utilizando como base o eixo real ou o eixo imaginário, ocorre uma reflexão da figura rotacionada em 180°. (HOYOS; MACHADO, 2019)

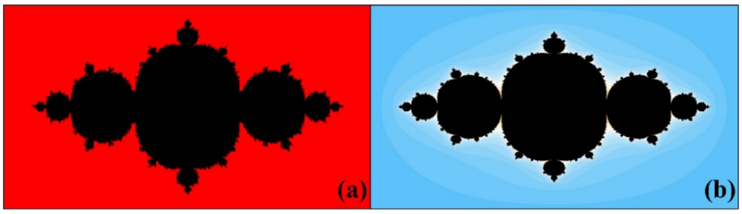

FIGURA 4. Conjuntos de Julia com $c = -0{,}75$ (a) e (b) (elaborados pela autora, respectivamente, nos softwares GeoGebra e ChaosPro)

Softwares

A partir da análise das imagens acima, pode-se perceber que é estipulada uma paleta de cores que opera em virtude das diversas órbitas possíveis. De forma concisa, normalmente se atribui a cor preta para os pontos cuja órbita é limitada e outra cor para aqueles cuja órbita é ilimitada, como foi definido para as figuras no GeoGebra, entretanto, softwares mais específicos, como o ChaosPro, definem uma ampla paleta de cores para indicar os pontos que pertencem ou não ao conjunto, atribuindo cores mais escuras aquelas coordenadas que possuem diversos pontos com órbita limitada, e cores mais claras aqueles lugares em que a maioria dos pontos tendem a ter órbita ilimitada. (RABAY, 2013)

CONCLUSÕES

No decorrer do artigo percebe-se a utilização de conteúdos matemáticos como números complexos, função quadrática, relação de recorrência, órbitas de um ponto, entre outros, todos esses conceitos são utilizados para a geração dos fractais no software GeoGebra, por isso são fundamentais na compreensão de tais figuras. Isso demonstra também a importância do avanço tecnológico, especialmente o desenvolvimento dos computadores para a criação e entendimentos dos fractais por relação de recorrência. A percepção da autossimilaridade só é possível, com melhor clareza, a partir da utilização de um software específico para essas figuras, visto que permitem a aproximação e possuem iterações infinitas, deixando claro o porquê de a geometria fractal só poder ser estudada com mais propriedade depois da criação dos computadores.

Ademais, percebe-se também a relação entre o Conjunto de Mandelbrot e dos Conjuntos de Julia que utilizam como função geradora a mesma função complexa. Em razão disso, algumas propriedades apresentadas nos Conjuntos de Julia estão interligadas com o fractal de Mandelbrot. Percebe-se, dessa maneira, que os Conjuntos de Julia são figuras que apresentam diversas complexidades e mistérios, pois além de sua aparência diferenciada, está contido em seu interior e formato diversas características relacionadas com os valores da constante c utilizados em sua formação.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao PIBIFSP - BRI/2021 pelo apoio financeiro nesta pesquisa.

REFERÊNCIAS

FUZZO, R. A. *Fractais: Algumas Características e Propriedades.* Disponível em:< http://www.fecilcam.br/nupem/anais_iv_epct/PDF/ciencias_exatas/10_FUZZO_REZENDE_SANTOS.pdf >. Acesso em: 05 de out. 2021.

HOYOS, M. G. C. MACHADO, E., E. *Conjuntos de Julia Quadráticos*. Revista de Matemática de Ouro Preto, v.06, n.01, p.11-39, 2019.

MIRANDA, A. J. *Fractais: Conjuntos de Julia e Conjuntos de Mandelbrot*. Sigmae, Alfenas, v.1, n.1, p.110-117. 2012.

RABAY, Y. S. F. *Estudo e aplicações da geometria fractal*. 2013. p.1-103. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Paraíba, Centro de Ciências Exatas e da Natureza, João Pessoa, 2013.