

## 12º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2021

### ANÁLISE ESTRUTURAL DE LAJES RETANGULARES SIMPLEMENTE APOIADAS PELO MÉTODO DE LEVY: MÓDULO DE PROGRAMA *ON-LINE*

JONATAN V. M. FERNANDES<sup>1</sup>, GUSTAVO C. NIRSCHL<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Graduando em Engenharia Civil, Voluntário PIVICT, IFSP, Câmpus Votuporanga, jonatan.fernandes@outlook.com.br

<sup>2</sup> Professor MSc. da área de Edificações, IFSP, Câmpus Votuporanga, nirschl@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Mecânica das Estruturas - 3.01.02.04-9

**RESUMO:** Um grupo de pesquisa cadastrado e ativo no CNPq vem produzindo diversos programas para computador e disponibilizando-os *on-line* via site de modo que esses programas possuem a característica de gerar relatório com todos os cálculos realizados de maneira a viabilizar o estudo e não somente a obtenção dos resultados. Sendo assim, foi criado, em projetos anteriores, um ambiente CAD-Lajes, chamado IFESTRUT-LAJES (disponível em <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/Ifestrut-lajes/ifestrut-lajes.html>), onde o usuário pode desenhar lajes, tornando-se possível realizar quaisquer análises estruturais a partir dos dados de entrada do usuário. Neste trabalho e dentro das premissas citadas, apresenta-se a criação de um módulo para o ambiente CAD-Lajes utilizando as linguagens de página de internet (HTML/JavaScript) assim como os outros programas do grupo de pesquisa em questão. O módulo proposto realiza a análise estrutural de lajes retangulares simplesmente apoiadas pela solução de Levy para carga distribuída em toda a laje, distribuída em uma região ou concentrada.

**PALAVRAS-CHAVE:** engenharia civil; estruturas; *on-line*; Levy; placas

### STRUCTURAL ANALYSIS OF RECTANGULAR SLABS SIMPLY SUPPORTED BY LEVY'S METHOD: ONLINE SOFTWARE MODULE

**ABSTRACT:** A research group registered and active at CNPq has been producing several softwares and making them available online via website so that these softwares have the characteristic of generating a report with all the calculations performed in order to make the study feasible and not only the obtainment of results. Therefore, in previous projects, a CAD-Slabs environment was created, called IFESTRUT-LAJES (available in <https://vtp.ifsp.edu.br/nev/Ifestrut-lajes/ifestrut-lajes.html>), where the user can design slabs, making it possible to perform any structural analysis from user input data. In this work and within the aforementioned premises, we present the creation of a module for the CAD-Slabs environment using the web page languages (HTML/JavaScript) as well as the other softwares of the research group in question. The proposed module will perform the structural analysis of rectangular slabs simply supported by Levy's solution for load distributed across the slab, distributed in a region or concentrated.

**KEYWORDS:** civil engineering; structures; online; Levy; plates

### INTRODUÇÃO

Nos dias atuais, graças à evolução e inovação tecnológica, existem diversos programas que realizam a análise estrutural de vários tipos diferentes de estruturas. Dito isso, grande parte desses

programas apresentam apenas os resultados dessas análises e não o processo necessário para obtê-los. Neste contexto, um grupo de pesquisa cadastrado no CNPq vem criando programas *on-line* que não só fazem cálculos, mas que demonstram todo o procedimento realizado, onde vários módulos foram criados para a análise de estruturas lineares planas e recentemente foi desenvolvido um software que possibilita o desenho de lajes para realizar a análise estrutural.

Neste sentido, o desenvolvimento dos aplicativos do grupo é realizado na linguagem HTML/JavaScript, que pode ser estudada em bibliografias como W3Schools (REFSNES DATA, 1998). Sendo assim, apresenta-se um módulo para o programa que realiza a análise de estruturas de lajes retangulares com condições de contorno simplesmente apoiadas por meio da solução de Levy. Além disso, o módulo também apresenta os resultados por meio de relatório em pdf (*portable document format*) que foi criado utilizando a biblioteca JavaScript chamada PDFMake (PAMPUCH; M., 2020).

## MATERIAL E MÉTODOS

De acordo com Dias (2019), a solução de Levy para a análise estrutural de placas surgiu da necessidade de um novo processo em relação à solução de Navier, de forma que a convergência fosse mais rápida. Escrito isso, o autor afirma que a solução de Levy converge rapidamente, as vezes até mesmo com o primeiro termo.

Conforme Soares (2004), a solução de Lévy consiste na resolução analítica de placas utilizando a equação de Sophie-Germain-Lagrange (Equação 1), de maneira que a resolução completa se dá pela soma de uma solução homogênea da equação de Lagrange com uma soma particular dessa mesma equação. Além disso, a solução de Levy pode ser aplicada em placas retangulares com condições de contorno simplesmente apoiadas em lados opostos, ou seja, em  $x=0$  e  $x=a$ , e os outros dois lados com condições de contorno arbitrárias, onde  $a$  é o comprimento da placa paralelo ao eixo  $x$ .

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \cdot \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q(x, y)}{D} \quad (1)$$

Em que:

$w$  – Equação dos deslocamentos transversais de uma placa;

$q$  – Função da carga na superfície da placa;

$D$  – Rigidez à flexão da placa, obtida pela Equação 2.

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)} \quad (2)$$

Em que:

$E$  – Módulo de elasticidade do material;

$t$  – Espessura da placa;

$\nu$  – Coeficiente de Poisson.

A solução de Levy, conforme Soares (2004), propôs uma série para a obtenção dos deslocamentos transversais para uma placa retangular simplesmente apoiada sujeita a carregamento distribuído sobre toda sua superfície, conforme mostra a Equação 3.

$$w = \frac{4qa^4}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left( 1 - \frac{\alpha_m t \operatorname{gh}(\alpha_m) + 2}{2 \cosh(\alpha_m)} \cosh\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) + \frac{m\pi y}{2a \cosh(\alpha_m)} \operatorname{senh}\left(\frac{2\alpha_m y}{b}\right) \right) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (3)$$

Em que:

$a$  – Dimensão da placa paralela ao eixo  $x$ ;

$b$  – Dimensão da placa paralela ao eixo  $y$ ;

$x$  – Posição  $x$  analisada;

$y$  – Posição  $y$  analisada;

$m$  – Termo do somatório;

$\alpha_m$  – Expressão presente na Equação 4.

$$\alpha_m = \frac{m\pi b}{2a} \quad (4)$$

Além disso, Soares (2004) mostra os esforços de cortantes, momentos fletores e momento torçor da placa (Equações 5 a 9), que são obtidos na Teoria da Elasticidade, juntamente com a Teoria de Kirchhoff.

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (6)$$

$$M_x = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\nu \partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (7)$$

$$M_y = -D \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\nu \partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (8)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (9)$$

Considerando o exposto, as equações 3 a 9 foram implementadas no programa de computador aqui apresentado. Nota-se que a obtenção explícita das equações 5 a 9 em função de  $w$  (Equação 3) foi feita com a ajuda de uma calculadora de derivadas on-line chamada Derivative Calculator (SCHERFGEN, 2021).

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

O usuário pode acessar a solução de Levy no botão “FUNÇÕES”, selecionando a opção “MÉTODO DE LEVY”, após desenhada a laje no programa com todos os seus dados de entrada, como pode ser visto contornado em verde na Figura 1. Feito isso, o módulo exibe uma tela com opções de entrada para a exibição dos diagramas obtidos pela solução. Além disso, existem opções no menu lateral, contornado em amarelo, onde o usuário pode escolher qual menu de diagrama deseja abrir para escolher o diagrama que deseja visualizar na tela contornada em vermelho.

Nas figuras 2 e 3 apresentam-se os diagramas de momento fletor  $M_x$  e deslocamento para a laje exemplo da Figura 1. Além da visualização desses diagramas, o usuário também pode acessar os valores dos pontos usando o mouse após ativar o botão “MOSTRAR”, contornado em vermelho nas figuras 2 e 3. O menu lateral, contornado em verde, é onde o usuário escolhe qual diagrama deseja visualizar na tela e, por meio dele, também é possível definir valores máximos e/ou mínimos no diagrama, para uma visualização específica de pontos. A característica mais importante do programa é gerar um relatório em pdf com os processos de cálculo realizados, acessado pelo botão mostrado dentro do menu lateral nas figuras 2 e 3.

Como uma maneira de corroborar com os resultados obtidos na solução de Levy, foi utilizado o software RFEM (DLUBAL, 2021), que trabalha com o MEF (Método dos Elementos Finitos), para comparação da mesma laje utilizada no exemplo apresentado. Na Tabela 1 pode-se observar a diferença em porcentagem dos valores máximos obtidos nos diagramas de momentos fletores e deslocamento.

Para o cálculo dentro do programa RFEM (DLUBAL, 2021) foi utilizada uma malha de elementos finitos de com 2,5x2,5 centímetros e na solução de Levy foi considerada uma convergência de 0,001 % e um número máximo de parcelas, “m”, de 1001. Exposto isso, ressalta-se que a convergência na solução de Levy implementada no módulo funciona com base na soma total dos termos anteriores do ponto analisado em relação à soma atual do termo no ponto (no exemplo, se a parcela atual do somatório for menor que 0,001% do valor do somatório acumulado ou o número da parcela “m” for maior que 1001, o programa para).

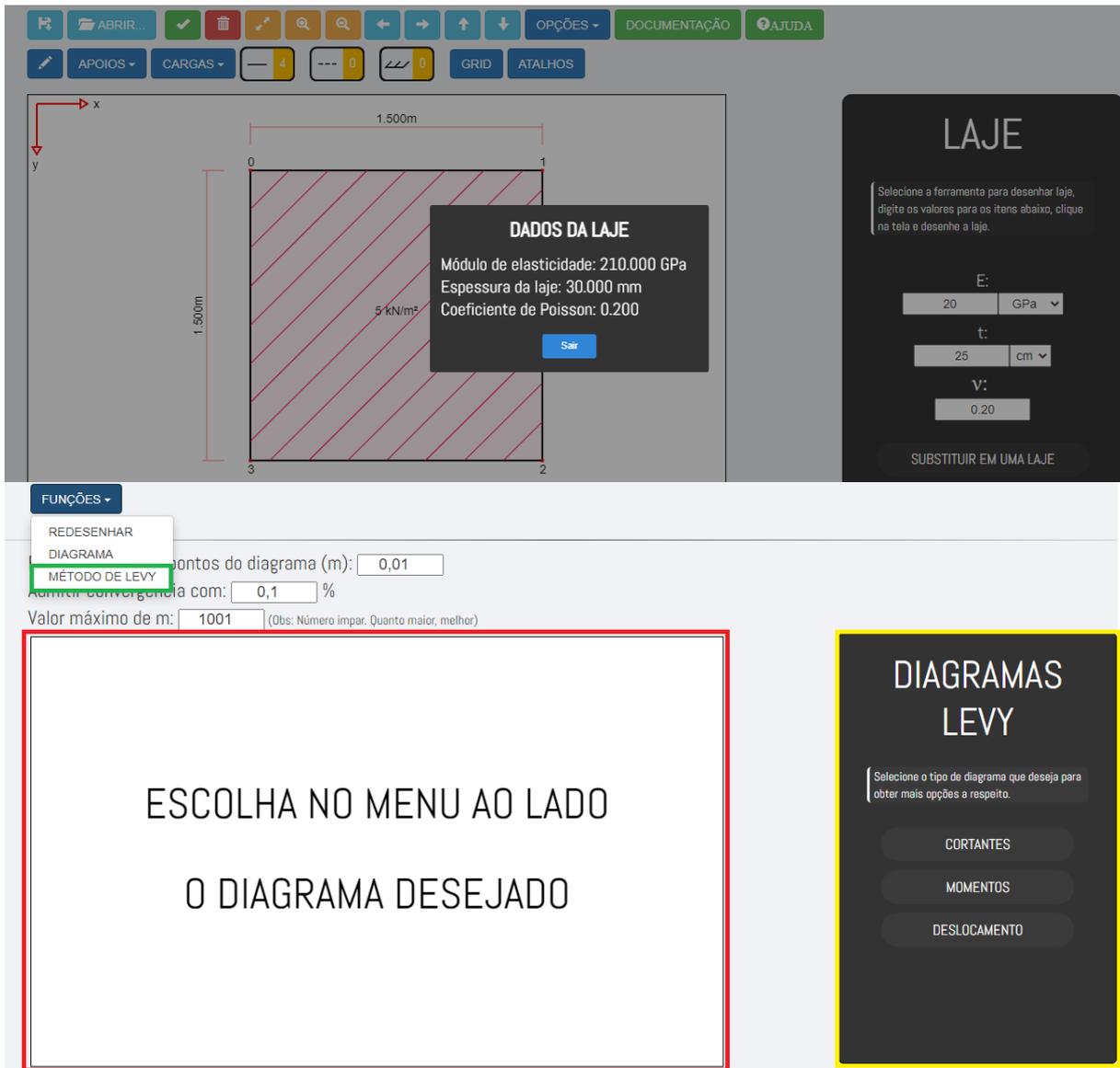


FIGURA 1. Tela principal do módulo desenvolvido juntamente com a laje exemplo.

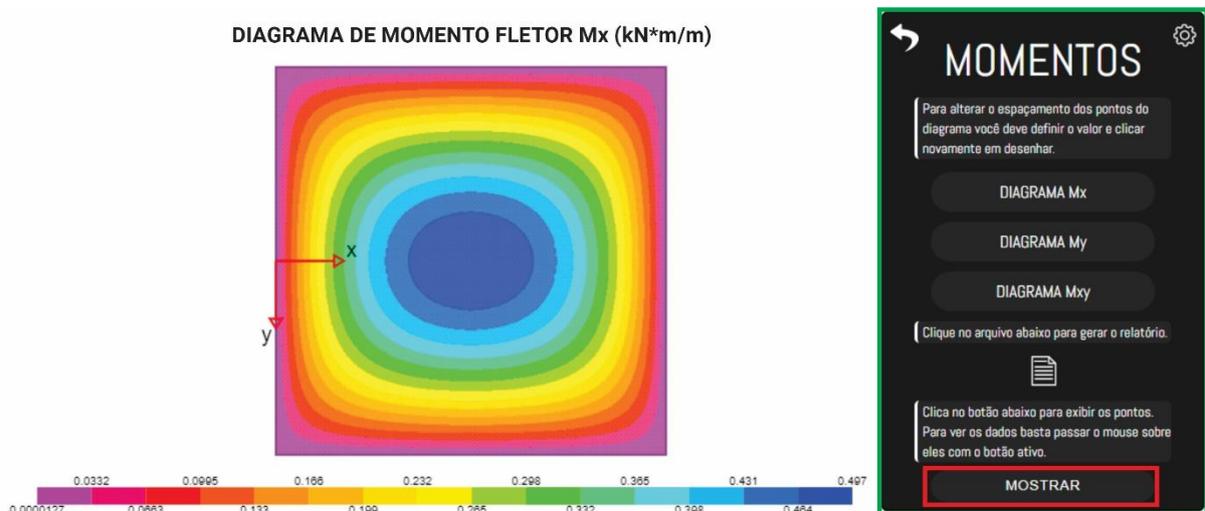


FIGURA 2. Diagrama do momento fletor no eixo x e menu de opções.

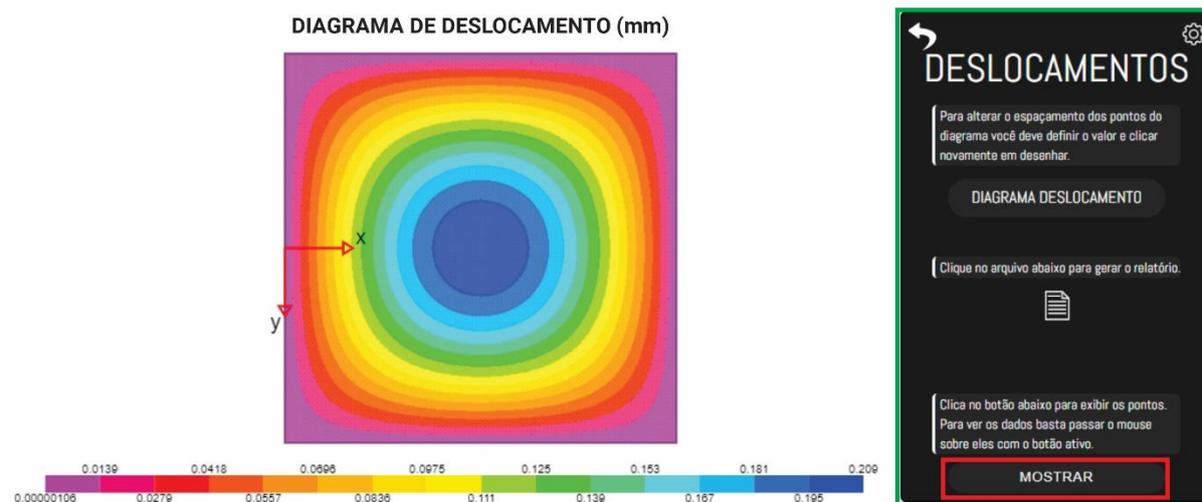


FIGURA 3. Diagrama de deslocamento e menu de opções.

TABELA 1. Comparação de resultados obtidos entre a solução de Levy e o programa RFEM (DLUBAL, 2021)

Esforços Máximos	RFEM	Levy	Diferença relativa (%)
Momento $M_x$ (kN*m/m)	0,49737	0,49728	0,0181
Momento $M_y$ (kN*m/m)	0,49737	0,49728	0,0181
Deslocamento (mm)	0,20901	0,20892	0,0431

Além dos diagramas apresentados para carga distribuída sobre toda a superfície, o módulo também calcula placas com carga distribuída sobre região e com carga concentrada, de maneira que fornece as mesmas opções já apresentadas.

## CONCLUSÕES

Os resultados mostram que o programa realiza os cálculos da solução de Levy com confiabilidade e portanto, considerando o relatório pdf, serve de fonte para estudos por parte de alunos e profissionais na análise estrutural de lajes.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao IFSP e ao meu orientador por toda a ajuda durante o desenvolvimento da pesquisa voluntária

## REFERÊNCIAS

DIAS, Nickolas Leitão. **A Teoria da Flexão de Placas Envolvendo a Equação Diferencial de Lagrange**. 2019. Trabalho de Conclusão de Curso (Matemática Aplicada Bacharelado) - Universidade Federal do Rio Grande, 2019. Disponível em:

<[https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica\\_aplicada/2019/2\\_019\\_2\\_Nickolas\\_Leitao\\_Dias.pdf](https://imef.furg.br/images/stories/Monografias/Matematica_aplicada/2019/2_019_2_Nickolas_Leitao_Dias.pdf)>. Acesso em: 12 mar. 2021.

REFSNES DATA (Noruega). **W3Schools**: Site de desenvolvedores web. [S. l.], 1998. Disponível em: <<https://www.w3schools.com/>>. Acesso em: 01 ago. 2021.

SOARES, Adilson Moreira. **Análise comparativa de esforços e deflexões em placas retangulares finas**. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Itajubá. Itajubá-MG, 2004. Disponível em: <<http://docplayer.com.br/82668953-Universidade-federal-de-itajuba.html>>. Acesso em: 28 jun. 2017.

PAMPUCH, Bartek; M., Libor. **PDFMake**: Biblioteca geradora de pdf. Versão 0.1.6.8. [S. l.], 20 jul. 2020. Disponível em: <<http://www.pdfmake.org/>>. Acesso em: 15 set. 2020.

SCHERFGEN, David. **Calculate derivatives online**. Derivative Calculator, 2021. Disponível em: <<https://www.derivative-calculator.net/>>. Acesso em: 20 abr. 2021.