

12º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2021

DEMONSTRAÇÃO DA PRIMEIRA PROPOSIÇÃO DO TRATADO *A MEDIDA DO CÍRCULO*

TAINARA DIAS AZEVEDO ¹
HENRIQUE MARINS DE CARVALHO ²

¹ Graduanda em Licenciatura em Matemática, pesquisadora voluntária PIVICT, IFSP, Câmpus São Paulo, azevedo.tainara@aluno.ifsp.edu.br.

² Doutor em Educação Matemática, Professor de Ensino Básico, Técnico e Tecnológico, orientador PIVICT, IFSP, Câmpus São Paulo, hmarins@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.03.00-7 Geometria e Topologia.

RESUMO: A obra *A medida do círculo* de Arquimedes apresenta, em três proposições, um estudo sobre a quadratura do círculo, procedimento para definir uma figura geométrica de área equivalente à de uma região definida por um círculo dado. O resultado obtido por Arquimedes determina uma aproximação com valores racionais para a constante que atualmente é identificada pela letra grega π . O objetivo desta pesquisa é a explanação, no aspecto lógico-matemático, utilizando simbologia e terminologia contemporâneas, da primeira proposição do tratado, apresentando-as de maneira que sejam acessíveis a leitores com fluência na matemática da Educação Básica.

PALAVRAS-CHAVE: quadratura do círculo; número π ; matemática grega; Arquimedes.

PROOF OF THE FIRST PROPOSITION OF THE TREATISE *MEASUREMENT OF A CIRCLE*

ABSTRACT: The work *Measurement of a circle* by Archimedes presents, in three propositions, a study about squaring the circle, a procedure to define a geometric figure of area equivalent to a region defined by a given circle. The result obtained by Archimedes determines an approximation using rational numbers for the constant that, currently, is identified by the Greek letter π . The aim of the research is to explain in a logical-mathematical way, using contemporary symbols and terminology, the first proposition of the treatise, and presenting them in an accessible way to readers with fluency in Elementary School mathematics.

KEYWORDS: squaring the circle; Greek mathematics; Archimedes.

INTRODUÇÃO

A medida do Círculo é um tratado curto de autoria do matemático Arquimedes de Siracusa contendo apenas três proposições, possivelmente parte de uma obra maior, mencionada por Pappus de Alexandria

(290 – 350) sob o título de *περί τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας*¹, que não chegou até nós (DIJKTERHUIS, 1987). Os enunciados das proposições, traduzidas por Grudtner, Bertato e D’Ottaviano (2021), são “Proposição 1: Todo círculo é igual a um triângulo retângulo, do qual um dos [lados] ao redor do [ângulo] reto é igual ao raio, e a base, ao perímetro [do círculo]”, “Proposição 2: O círculo para o quadrado do diâmetro tem uma razão, como [aproximadamente] 11 para 14” e “Proposição 3: O perímetro de todo círculo é o triplo do diâmetro e [o] excede, além disso, em menos que a sétima parte do diâmetro, e em mais que dez setenta e um avos [do mesmo], ou seja, o perímetro é menor que $3\frac{1}{7}$ e maior que $3\frac{10}{71}$ do diâmetro”.

O tema principal da obra é a *quadratura do círculo*, um dos três problemas clássicos da Antiguidade (os outros são a duplicação do cubo e a trisseção do arco). Obter a quadratura de uma região qualquer corresponde, em outras palavras, ao processo de determinar outra figura, normalmente um retângulo ou triângulo (cujas medidas de áreas são facilmente calculáveis), que seja numericamente igual em termos da medida da área. Os objetos e procedimentos matemáticos empregados por Arquimedes são, em boa parte, pouco familiares para usuários da matemática contemporânea. Nesta pesquisa, buscamos esclarecer os termos, conceitos e operações presentes no tratado, usando a simbologia matemática atual. Especificamente na primeira proposição temos: método da exaustão de Eudoxo, dupla redução ao absurdo, inscrição e circunscrição de polígonos.

MATERIAIS E MÉTODOS

Esta pesquisa adotou a metodologia de pesquisa bibliográfica, sustentada por materiais já elaborados, especialmente de livros e artigos científicos (GIL, 2002).

A proposição 1 do tratado é logicamente provada com o recurso da *dupla redução ao absurdo* que pode ser entendida no contexto das operações lógicas e da estratégia de demonstração por contradição (ou redução ao absurdo). Um teorema matemático é usualmente apresentado na forma $H \rightarrow T$, sendo H a hipótese (ou conjunto de hipóteses) e T a tese (ou teorema), ou seja, a conclusão que deriva da hipótese. Essa sentença lógica tem o mesmo resultado da sentença complexa $\neg(H \wedge \neg T)$ ².

Assim, a negação do teorema $H \rightarrow T$, isto é, $\neg(H \rightarrow T)$, corresponde à negação da sentença $\neg(H \wedge \neg T)$ que, pelo princípio da dupla negação³ equivale a $(H \wedge \neg T)$. Se, no desenvolvimento de deduções ou operações feitas a partir desta sentença complexa $(H \wedge \neg T)$ for obtida uma afirmação do tipo $P \wedge \neg P$, ferindo o princípio lógico da *não contradição*, tal resultado é considerado uma consequência da negação do teorema original que deve ser – obrigatoriamente – desfeita, evitando a inconsistência lógica. Em suma, se a sentença $\neg(H \rightarrow T)$ gerar uma impossibilidade lógica, pelo princípio do *terceiro excluído*, a única alternativa é que seja verdadeira a proposição $H \rightarrow T$ e assim o teorema diz-se demonstrado por contradição ou redução ao absurdo.

Retornando ao caso da demonstração por dupla redução, a justificativa lógica é semelhante, com a seguinte consideração: se o teorema a ser provado afirmar sobre a igualdade de dois termos (com relação a alguma propriedade mensurável), isto é, quando disser que $x = y$, sua negação levaria a $x \neq y$, o que, pelo Princípio da Tricotomia, implica que $x > y$ ou $x < y$.

Outra ferramenta usada por Arquimedes ao longo da demonstração é o chamado *método da exaustão de Eudoxo* que, em uma simbologia atual, pode ser assim enunciado: “Sejam $M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, \dots$ números positivos tais que $M_1 < \frac{1}{2}M_0$, $M_2 < \frac{1}{2}M_1$, $M_3 < \frac{1}{2}M_2$ e assim por diante. Seja $\varepsilon > 0$. Então

¹Transliteração: *perí tés tou kýklou periferías*. Tradução livre: sobre a circunferência.

²Essa tautologia pode ser verificada pela construção da tabela-verdade da sentença $(H \rightarrow T) \leftrightarrow \neg(H \wedge \neg T)$.

³ $\neg(\neg A)$ é tautologicamente equivalente à própria sentença A .

existe um número inteiro positivo N tal que $M_N < \varepsilon$." (PATERLINI; AZEVEDO, 2004)

Esse método é uma base importante para o desenvolvimento das demonstrações que apresentamos, já que garante a obtenção de um valor tão pequeno quanto se desejar desde que se defina uma sequência numérica M_i tal que um termo seja dado sempre como a metade do anterior, isto é $M_{i+1} = \frac{1}{2}M_i$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Atualmente, para verificar a proposição 1, citada anteriormente, o processo é imediato quando conhecidas as expressões para o cálculo da área de triângulos ($A_t = \frac{a \cdot b}{2}$) e de círculos ($A_o = \pi \cdot r^2$), ensinadas na educação básica. Estratégias para se obter a área de um triângulo foram detalhadamente descritas por Euclides, porém a quadratura do círculo ainda era um desafio enfrentado por Arquimedes e seus contemporâneos.

A demonstração que comentamos a seguir, acompanhando a tradução feita por Grudtner et al. (2021), adota a estratégia da dupla redução ao absurdo, dividida em duas partes: a primeira supondo que a área do círculo pudesse ser maior que a área do triângulo e a segunda, supondo que a área do círculo fosse menor que a área do triângulo. Ao obter uma contradição em ambos os casos, prova-se que a área do círculo não será maior e nem menor, logo, será igual.

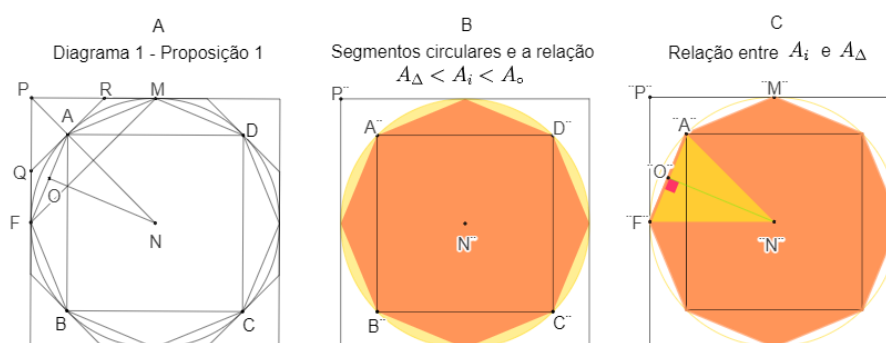


Figura 1: Análises e construções feitas na primeira parte.

Primeira parte da demonstração: supondo que a área do círculo (A_o) é maior que a área do triângulo (A_Δ) e tendo inscrito no círculo um quadrado AC (Arquimedes adota, nesta e em outras obras, a prática de indicar um quadrilátero pela escrita de dois vértices opostos), considera-se o seguinte procedimento: bisseccionar cada um dos lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{DA} , e, então, encontrar os pontos correspondentes no perímetro do círculo, obtendo assim um novo polígono (de 8 lados), sendo que seus vértices são os próprios pontos de bissecção. E, quando novamente bisseccionado, o novo polígono encontrado terá o dobro de lados do polígono obtido anteriormente, i.e., 16 lados, e assim sucessivamente. Dessa forma, a duplicação dos lados do polígono pode ser feita continuamente.

Para cada polígono inscrito, podem ser identificados os segmentos circulares formados pelas sucessivas bissecções (vide figura 1-B). A soma das áreas de todos esses segmentos é a diferença entre a área do círculo e a área do polígono regular inscrito (representemos por $A_o - A_i = S$).

No entanto, ao assumir a hipótese de que $A_o > A_\Delta$, isso implica que existe um excesso da área do círculo em relação à área do triângulo (chamemos de $X = A_o - A_\Delta$ este excesso). A partir disso, eventualmente, S será menor que X , após uma quantidade finita de repetições das bissecções dos lados do polígono original (Princípio de Eudoxo). Dessa forma, quando $S < X \Rightarrow A_o - A_i < A_o - A_\Delta$, o que leva a $A_i > A_\Delta$ (*afirmação I-a*).

A justificativa do raciocínio apresentado encontra-se em um suporte dedutivo já estabelecido nos *Elementos* de Euclides, mas podemos conjecturar que Arquimedes verificou a relação entre a soma S das áreas dos segmentos circulares e a diferença X entre a área do círculo e a área do triângulo, percebendo a possibilidade de inverter a desigualdade que originalmente poderia ser $S > X$, se o processo de bissecção fosse repetido de forma sucessiva.

Arquimedes segue, então, sua demonstração em busca do absurdo. Observe a figura 1-C que retrata o procedimento realizado por ele (descrito na tradução de (GRUDTNER; BERTATO; D’OTTAVIANO, 2021, no prelo.)). Nota-se claramente que $\overline{ON} < r$. Além disso, considerando um polígono inscrito no círculo cujo perímetro é P_i , temos $P_i < P_o$, sendo P_o o perímetro do círculo.

A área do triângulo A_Δ foi definida como a metade do produto do perímetro do círculo P_o pela medida do raio r , isto é, $A_\Delta = \frac{P_o \cdot r}{2}$. A área do polígono regular inscrito de n lados, por outro lado, pode ser entendida como a soma das áreas de n triângulos isósceles cujas bases são os lados do polígono e as alturas são apótemas do polígono. Simbolicamente, se chamarmos de ℓ a medida do lado do polígono inscrito e de h a medida de seu apótema, temos $A_i = \frac{n \cdot \ell \cdot h}{2}$. Como $n\ell < P_o$ (sendo que $n\ell = P_i < P_o$) e $h < r$ pois, $h = \overline{ON} < r$, temos que $A_i < A_\Delta$ (*afirmação I-b*). Em virtude da contradição com a *afirmação I-a*, rejeita-se a suposição de que a área do círculo seja superior à área do triângulo.

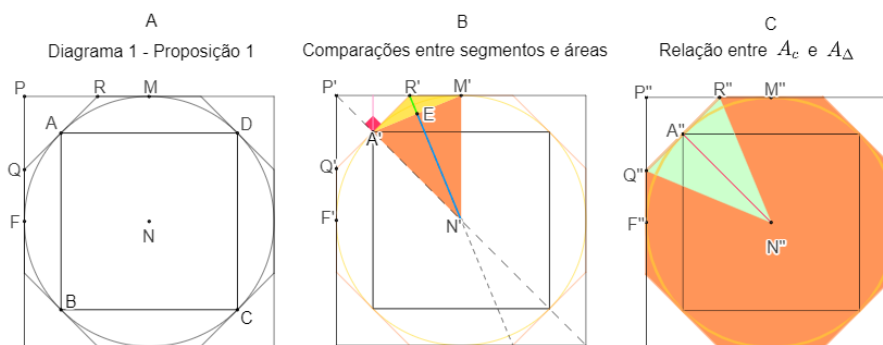


Figura 2: Análises e construções feitas na segunda parte.

Segunda parte da demonstração: suponha, então, que a área do círculo seja menor que a área do triângulo. Com o apoio da figura 2-B, observamos um quadrado com dois de seus lados tangentes ao círculo em F e M , que se interceptam no vértice P . A bissecção do menor arco FM gera o ponto A e a reta t , tangente ao círculo em A e suporte do segmento \overline{RQ} , lado do octógono circunscrito.

Considerando que a hipotenusa do triângulo PRA é maior que qualquer um de seus catetos, em especial $\overline{PR} > \overline{AR}$ e que $\overline{MR} = \overline{AR}$, Arquimedes chega à conclusão $\overline{PR} > \overline{MR}$ ⁴. Para justificar que $\overline{MR} = \overline{AR}$, observamos os dois triângulos NAM e RAM , e, sendo N o centro do círculo: NAM é um triângulo isósceles de lados r (raio) e base \overline{AM} , cuja altura \overline{NE} é também mediatriz, portanto E é o ponto médio de \overline{AM} . Para o triângulo RAM ocorre algo semelhante pois \overline{RE} é a altura de RAM e, como \overline{RE} também passa pelo ponto médio E , o triângulo RAM é isósceles de lados $\overline{AR} = \overline{RM}$, logo R é equidistante de A e M . Observando que o segmento pontilhado que contém \overline{AN} (Figura 2-B) divide ao meio tanto o triângulo RPQ quanto a figura $PFAM$, suas áreas podem ser comparadas a partir da desigualdade entre a área do triângulo PRA e a área ARM da seguinte maneira: $PRA > ARM \Rightarrow 2 PRA > 2 ARM$ e, ainda, $2 ARM = PFAM - RPQ$, então $2 PRA > PFAM - RPQ$, só que $RPQ = 2 PRA \Rightarrow RPQ > PFAM - RPQ \Rightarrow RPQ > \frac{PFAM}{2}$.

⁴Adotamos o sinal de igualdade referindo-nos à ideia de congruência entre segmentos.

O procedimento realizado a seguir é análogo ao feito na primeira parte da demonstração, considerando a diferença $Y = A_{\Delta} - A_{\circ}$ e o excesso da área do polígono circunscrito (A_c) em relação ao círculo $K = A_c - A_{\circ}$, dado pela soma das áreas das figuras do tipo *QFA*. Pelo Princípio de Eudoxo, eventualmente,

$$K < Y \Rightarrow A_c - A_{\circ} < A_{\Delta} - A_{\circ} \quad \text{assim,} \quad A_c < A_{\Delta} \quad (\text{afirmação II-a}).$$

Considerando os triângulos isósceles que formam o polígono regular circunscrito, suas alturas são iguais a um dos catetos do triângulo E , uma vez que $\overline{NM} = r = \overline{AN}$ (ver figura 2-C) e, como o polígono tem n lados, chamando a medida de cada lado de ℓ , seu perímetro é dado por $P_c = n \cdot \ell$, o que nos leva a $\ell = \frac{P_c}{n}$. Além disso, a área de cada um dos triângulos isósceles que formam o polígono será dada por $A_{\Delta i} = \frac{\ell \cdot r}{2} = \frac{r \cdot P_c}{2n}$. Como a área do polígono A_c é dada por n vezes a área $A_{\Delta i}$, então: $A_c = \frac{n \cdot r \cdot P_c}{2n} = \frac{r \cdot P_c}{2}$. Por outro lado, a área do triângulo retângulo descrito no início da proposição é dada por $A_{\Delta} = \frac{r \cdot P_{\circ}}{2}$, sendo P_{\circ} o perímetro do círculo. Dessa forma, como $P_{\circ} < P_c$ pois o polígono é circunscrito ao círculo, temos que

$$\frac{r \cdot P_{\circ}}{2} < \frac{r \cdot P_c}{2} \quad \text{assim,} \quad A_{\Delta} < A_c \quad (\text{afirmação II-b}).$$

Com isso, surge uma nova contradição entre as afirmações II-a e II-b, pois $A_c < A_{\Delta}$ e $A_c > A_{\Delta}$ não podem ser simultâneos, então, a área do círculo não é menor que a área do triângulo.

Se a área do triângulo E não é maior nem menor que a área do círculo, já que ambos os casos geraram contradições lógicas, conclui-se que a negação do teorema deve ser desfeita, o que Arquimedes reafirma retomando a tese da proposição: **“Então, o círculo [é] igual ao triângulo E .”** (GRUDTNER; BERTATO; D’OTTAVIANO, 2021, no prelo.)

CONCLUSÕES

O processo de interpretação e escrita das demonstrações da primeira proposição do tratado *A medida do círculo* permitiu examinar um tema importante no desenvolvimento da matemática que pode ser entendido como a base sobre a qual se desenvolveu a geometria analítica, o cálculo diferencial e integral, dentre outras áreas da matemática contemporânea. Os experimentos mentais feitos por Arquimedes nas demonstrações utilizando recursos da lógica clássica nos mostram dois aspectos da matemática, um que depende do engenho e da intuição e outro que se sustenta sobre o emprego adequado das normas e formalizações.

REFERÊNCIAS

DIJKTERHUIS, E. J. *Archimedes*. Princeton: Princeton University Press, 1987.

GIL, A. C. *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Editora Atlas, 2002.

GRUDTNER, G. L.; BERTATO, F. M.; D’OTTAVIANO, I. M. L. A medida do círculo: Uma tradução do texto ΚΥΚΛΟΥ ΜΕΤΡΗΣΙΣ de arquimedes. *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 21, n. 41, p. 1 – 13, 2021, no prelo.

PATERLINI, R. R.; AZEVEDO, E. *O princípio de Eudoxo, ou o método da exaustão*. 2004. Disponível em: <<https://www.dm.ufscar.br/hp/hp527/hp527001/hp5270011/hp5270011.html>>. Acesso em: 24/07/2021.