11º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP - 2020

Matemática Aplicada a Linhas de Transmissão

ENZO C. MARADEI[1], BRUNA G. DE LIMA[2], RODRIGO C. DA SILVA[3]

[1]Graduando em Engenharia Elétrica, Bolsista PIVICT, IFSP, Câmpus Votuporanga, maradei.enzo@aluno.ifsp.edu.br.
[2]Doutora em Engenharia Elétrica, Docente, IFSP, Câmpus Votuporanga, bruna.glv.lima@ifsp.edu.br.
[3]Doutor em Engenharia Elétrica, Docente, IFSP, Câmpus Votuporanga, rcleber@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.04.00-3 Matemática Aplicada.

RESUMO: A matemática sempre foi utilizada como ferramenta de decisão para resolução de problemas aplicados ao cotidiano. Nos estudos de modelos de linhas de transmissão não poderia ser diferente, em que é necessário fazer um estudo dos problemas físicos com o auxílio do cálculo e da álgebra linear. O objetivo deste projeto de iniciação científica é apresentar um estudo de caso que evidencia os conceitos matemáticos envolvidos no processo de resolução de linhas de transmissão. O caso escolhido foi o método de resolução de linhas polifásicas por meio de uma matriz de decomposição modal. Para a demonstração, será utilizado uma linha bifásica com plano de simetria vertical. Este método se concentra na construção de uma matriz que compõe os autovetores do produto $[Z][Y]$. Para isso, foi necessário efetuar o aprofundamento de conhecimentos relacionado à álgebra linear, o que classifica o problema também como estudo da Matemática Aplicada. Por fim, uma simulação comprova os resultados trabalhados em testes de sistemas computacionais.

PALAVRAS-CHAVE: matemática aplicada; álgebra linear; diagonalização matricial; linhas de transmissão.

Mathematics Applied to Transmission Lines

ABSTRACT: Mathematics has always been used as a decision tool for solving problems applied to everyday life. In the studies of transmission line models it could not be different, in which it is necessary to make a study of physical problems with the aid of calculus and linear algebra. The objective of this scientific initiation project is to present a case study that highlights the mathematical concepts involved in the transmission line resolution process. The chosen case was the method of solving polyphasic lines by means of a modal decomposition matrix. For the demonstration, a two-phase line with a vertical symmetry plane will be used. This method focuses on building a matrix that makes up the eigenvectors of the product $[Z][Y]$. For that, it was necessary to deepen the knowledge related to linear algebra, which also classifies the problem as a study of Applied Mathematics. Finally, a simulation proves the results worked on tests of computer systems.

KEYWORDS: aplicated math; linear algebra; matrix diagonalization; transmission lines.

INTRODUÇÃO

O crescimento contínuo da demanda energética mundial trouxe a necessidade de sistemas elétrico/eletrônicos mais inteligentes, com padrões mais rigorosos de qualidade, de tal forma que pesquisas vem sendo desenvolvidas, principalmente nas áreas de geração, transmissão e distribuição de grandes blocos de energia elétrica. No presente projeto, é apresentado um estudo de caso na área de sistemas de linhas de transmissão, definido como a transferência de energia elétrica, guiados desde uma fonte geradora até uma carga consumidora.

Modelos matemáticos têm sido utilizados para descrever fenômenos físicos e problemas das engenharias e constituem uma importante ferramenta para a quantificação da previsão da evolução do sistema. Para o caso de problemas de linhas de transmissão não poderia ser diferente, uma vez que os parâmetros longitudinais e transversais são definidos em função de suas características geométricas, como forma de ondas de propagação em cadeia (OLIVEIRA; OLIVEIRA; MAIORINO, 1997).

Dessa forma, não apenas será apresentado um estudo de caso, como também será desenvolvido o processo algébrico de uma aplicação real de modelos de linhas de transmissão, com enfoque na matemática aplicada. Em particular, para esse problema, é fundamental a análise de conceitos da álgebra linear, em especial no que se refere a autovalores, autovetores e diagonalização de matrizes (SILVA, 2012).

O modelo considerado trata-se de uma linha bifásica, com plano de simetria vertical. Dentre os conceitos trabalhados, será explorado a transformação modal, com o desacoplamento de fases da linha pelos seus autovetores $[T_I]$ e $[T_V]$ (KUROKAWA et al., 2003). Uma simulação computacional é efetuada para determinação dos resultados finais.

MATERIAIS E MÉTODOS

Em cálculos de linhas de transmissão de energia elétrica, a característica fundamental é o fato de seus parâmetros longitudinais e transversais serem distribuídos ao longo do comprimento da mesma. Esta característica, simultaneamente com o fato dos parâmetros longitudinais da linha serem variáveis em função da frequência, tornam a linha de transmissão um elemento com certas peculiaridades, e que pode ser representado perfeitamente por modelos matemáticos (SILVA, 2012) (MARTI, 1982).

Uma linha de transmissão bifásica com os condutores separados por uma distancia d, em uma determinada altura h, pode ser representada assim como a Figura 1.

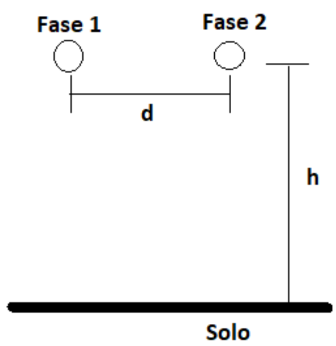

Figura 1: Representação de um linha de transmissão bifásica.

Devido ao acoplamento existente entre as fases da linha e dado que há um plano de simetria vertical, é possível, pelas características geométricas, representar o sistema por meio de matrizes de impedância longitudinal, $[Z]$, e admitância transversal, $[Y]$:

$$[Z] = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [Y] = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

onde $[Z]$ representa a impedância longitudinal e $[Y]$ a impedância transversal.

Neste caso em específico, há a igualdade de impedâncias: $Z_{11} = Z_{22} = A$ e $Z_{12} = Z_{21} = B$, assim como as admitâncias $Y_{11} = Y_{22} = C$ e $Y_{12} = Y_{21} = D$. Então é possível representar pelo mesmo termo, de forma que:

$$[Z] = \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad [Y] = \begin{bmatrix} C & D \\ D & C \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Conclui-se que as matrizes encontradas são idealmente transpostas, pois possuem termos comum em sua diagonal principal.

Segundo demonstrado em (FUCHS, 1979), ao aplicar a segunda Lei de Kirchhoff nas malhas do circuito representante da linha bifásica da Figura 1, é possível encontrar as equações diferenciais no domínio da frequência para as matrizes de tensão $[V]$ e corrente $[I]$, como pode ser visto pelas equações 3.

$$\frac{\partial^2[V]}{\partial x^2} = [Z][Y][V] \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2[I]}{\partial x^2} = [Y][Z][I]. \tag{3}$$

Então é necessário efetuar o produto das matrizes $[Z][Y]$ e $[Y][Z]$, que resultam em

$$[Z][Y] = \begin{bmatrix} AC+BD & AD+BC \\ AD+BC & AC+BD \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [Y][Z] = \begin{bmatrix} AC+BD & AD+BC \\ AD+BC & AC+BD \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Verifica-se que os produtos $[Z][Y]$ e $[Y][Z]$ são exatamente iguais para uma linha bifásica com plano de simetria vertical, ou seja é possível representar por uma única matriz $[K]$, em que seus termos valem $K_1 = AC + BD$ e $K_2 = AD + BC$.

$$[Z][Y] = [Y][Z] = [K] = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \\ K_2 & K_1 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Se os cálculos fossem feitos com as matrizes de (5), determinar a solução para (3) seria muito complexo e, por isso, é realizada uma transformação do sistema para o desacoplamento dessa linha em um novo domínio, conhecido como *domínio modal*. Para isto, é necessário trabalhar com matrizes diagonais, que podem ser obtidas a partir da diagonalização da matriz $[K]$. Isto quer dizer que os autovalores e autovetores de $[K]$ possibilitam gerar uma transformação que leva a uma simplificação do problema, ou seja, o modelo de representação de linha que antes era bifásico é transformado em duas linhas monofásicas independentes, uma vez que a matriz $[K]$ seja diagonalizada.

É importante ressaltar que mesmo para o caso geral em que pode-se ter $[Z][Y] \neq [Y][Z]$, os autovalores $[\lambda_V]$ e $[\lambda_I]$, respectivamente, são iguais (YAMANAKA, 2009), com as fórmulas:

$$[\lambda_V] = [T_V]^{-1}[Z][Y][T_V] \quad \text{e} \quad [\lambda_I] = [T_I]^{-1}[Y][Z][T_I]. \tag{6}$$

Da álgebra linear, as matrizes $[T_V]$ e $[T_I]$ contém em suas colunas os autovetores dos respectivos $[Z][Y]$ e $[Y][Z]$, sobre o corpo dos complexos, ou seja, são as matrizes que diagonalizam estes produtos matriciais. Para o caso bifásico, a diagonalização pode ser determinada a partir do polinômio característico,

$$det([K] - \lambda[I_d]) = 0, \tag{7}$$

que resulta nos autovalores $\lambda_1 = K_1 + K_2$ e $\lambda_2 = K_1 - K_2$. Isto quer dizer que (ANTON; TORRES, 2001):

$$[K]T_1 = \lambda_1 T_1 \qquad \text{e} \qquad [K]T_2 = \lambda_2 T_2. \tag{8}$$

Ao resolver os sistemas lineares (8), obtém-se $T_{11} = T_{21}$ e $T_{12} = -T_{22}$, ou seja, tem-se de maneira genérica o formato dos autovetores que compõem as colunas de $[T_V]$. Se, por exemplo, atribui-se o valor arbitrário de 1 para as primeiras componentes dos autovetores, então:

$$[T_V] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{9}$$

De acordo com (KUROKAWA et al., 2003), $[T_I] = [T_V]^{-T}$, logo:

$$[T_I] = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para comprovar os métodos trabalhados será efetuado os cálculos reais, trabalhando com o método de decomposição de linhas bifásicas, pelas matrizes de decomposição $[T_I]$ e $[T_V]$. O modelo utilizará também a decomposição de linha em seus modos de propagação, pelo método de cascata de circuitos pi, se tornando mais fácil encontrar as tensões e correntes de fase para a linha de transmissão bifásica (YAMANAKA, 2009) (SILVA, 2012).

Considerando a linha bifásica da Figura 1, é possível atribuir, para uma frequência de 60Hz, os seguintes valores para $[R]$, $[L]$ e $[C]$ dados pelos seus parâmetros de linha (SILVA, 2012):

$$[R] = \begin{bmatrix} 0,3947 & 0,3945 \\ 0,3945 & 0,3947 \end{bmatrix} (\Omega/km)\ ,\ [L] = \begin{bmatrix} 1,6 & 0,94746 \\ 0,94746 & 1,6 \end{bmatrix} (mH/km) \text{ e } [C] = \begin{bmatrix} 12,56 & -4,19 \\ -4,19 & 12,56 \end{bmatrix} (nF/km). \tag{11}$$

Lembrando que o valor da Condutância (G) foi desconsiderado, pelo fato de que na linha área a interferência é praticamente nula.

Para decompor a linha em duas linhas monofásicas idênticas, basta que sejam determinados $[R]$, $[L]$ e $[C]$ em seu formato diagonalizado, para assim, encontrar os parâmetros da linha, que formarão a impedância longitudinal e admitância transversal (SILVA, 2012) (YAMANAKA, 2009). Nesse processo será trabalhado utilizando as duas matrizes de transformação modais encontradas $[T_I]$ e $[T_V]$, utilizando na formula apresentada, como:

$$[Z_m] = [T_V]^{-1}[Z][T_I] \text{ e } [Y_m] = [T_I]^{-1}[Y][T_V] \tag{12}$$

Com as equações 12 é possível determinar os valores de $[R]$, $[L]$ e $[C]$ em seu formato diagonalizado, como nas sua formas modais (SILVA, 2012):

$$[R_m] = \begin{bmatrix} 0,3946 & 0 \\ 0 & 0,0001 \end{bmatrix} (\Omega/km)\ ,\ [L_m] = \begin{bmatrix} 1,3 & 0 \\ 0 & 0,3 \end{bmatrix} (mH/km) \text{ e } [C_m] = \begin{bmatrix} 16,74 & 0 \\ 0 & 33,5 \end{bmatrix} (nF/km). \tag{13}$$

Com as matrizes diagonalizadas na sua forma modal, significa que as mesmas então desacopladas, ou seja, a linha foi decomposta em duas linhas monofásicas sem relação direta e sem acoplamento entre si no domínio modal. Utilizando o programa computacional Scilab, será simulado o gráfico das tensões para obtenção dos resultados finais. Considerando que esta linha possui 100km de comprimento e foi energizada por uma tensão de 40kV no terminal emissor da fase 1 e o terminal emissor da fase 2 foi aterrado. Os terminais receptores da linha ficaram em aberto. Para encontrar as tensões ao longo de sua extensão, foi utilizado o modelo de linha com parâmetros discretos de circuito (SILVA, 2012). As tensões, no domínio modal, podem ser obtidas pelo gráfico da figura 2. A partir dos dados encontramos podemos transformar o resultado da tensão no domínio modal (tesões para duas fases monofásicas) para sua representação no domínio das fases, ou seja, a tensão bifásica real da linha, utilizando a matriz de transformada mostrada na equação 9, 10 e com a equação de transformada modal inversa, $[V] = [T_V][E_M]$, onde o resultado pode ser visto pela figura 3.

CONCLUSÕES

O trabalho tem uma imensa importância na interdisciplinaridade entre a Álgebra Linear e sistemas de linhas de transmissão, elaborando um estudo de caso na aplicação de uma situação real na área, a

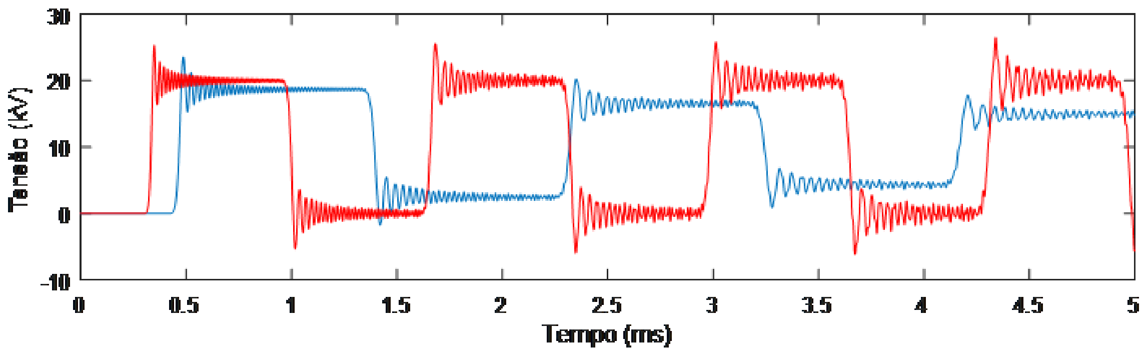

Figura 2: Tensão do modo 1 em azul e a tensão do modo 2 em vermelho

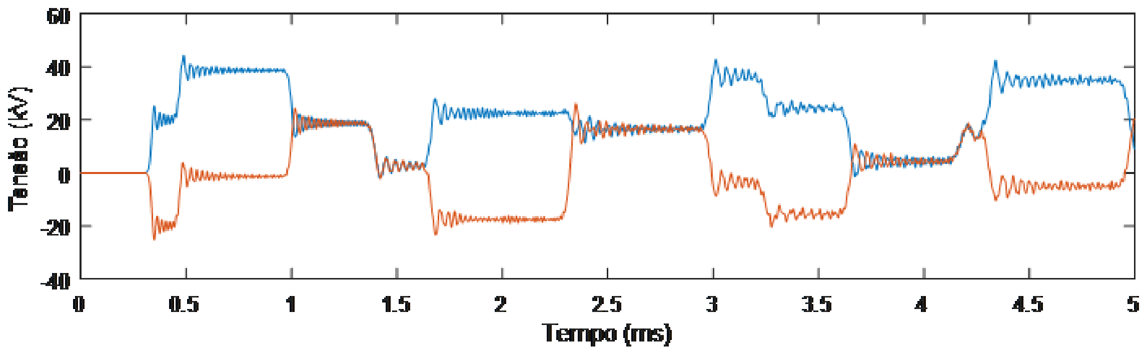

Figura 3: Tensão da fase 1 em azul e a tensão da fase 2 em vermelho

partir de ferramentas da matemática aplicada em problemas físicos. O artigo apresentou a utilização autovalores e autovetores de uma matriz para gerar uma transformação, a mesma leva a uma simplificação do problema, ou seja, um modelo de representação de linha bifásica foi transformado para duas linhas monofásicas independente que ocasiona na resolução de um Sistemas de Equações Diferenciais mais simples. O método se prova útil, podendo ser aplicado em casos de linhas com 3 ou mais fases, para sua decomposição.

Referências

ANTON, H.; TORRES, C. *Álgebra linear com aplicações*. [S.l.]: Bookman Porto Alegre, 2001. v. 8.

FUCHS, R. D. *Transmissao de energia eletrica: linhas aereas; teorias das linhas em regime permanente*. [S.l.]: Livros Tecnicos e Cientificos, 1979.

KUROKAWA, S. et al. Parâmetros longitudinais e transversais de linhas de transmissão calculados a partir das correntes e tensões de fase. [sn], 2003.

MARTI, J. R. Accurate modelling of frequency-dependent transmission lines in electromagnetic transient simulations. *IEEE Transactions on power apparatus and systems*, IEEE, n. 1, p. 147–157, 1982.

OLIVEIRA, E. C. de; OLIVEIRA, E. C. de; MAIORINO, J. E. *Introdução aos métodos da matemática aplicada*. [S.l.]: Unicamp, 1997.

SILVA, R. C. d. Representação de linhas de transmissão, utilizando elementos discretos de circuitos, no domínio das fases. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2012.

YAMANAKA, F. N. R. Inclusão do efeito da frequência nas equações de estado de linhas bifásicas: análise no domínio do tempo. Universidade Estadual Paulista (UNESP), 2009.