TRANSLAÇÃO E ROTAÇÃO DE CÔNICAS EM R^2

LAURA PRATES DEBORTOLI[1], JOÃO DA MATA SANTOS FILHO[2]

[1] Cursando Técnico em Administração Integrado ao Ensino Médio, IFSP, Campus Birigui, laurapratez.13@gmail.com
[2] Docente do Instituto Federal de São Paulo, Campus Birigui, damata@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.00.00-8 Matemática

RESUMO: O presente trabalho tem procurado entender um pouco mais sobre o estudo das cônicas além do que geralmente é oferecido no Ensino Médio, estudando também aquelas cujo centro é a origem do sistema cartesiano e reta focal não se encontra sobre um dos eixos do sistema cartesiano. O intuito é mostrar que é possível transformarmos as equações dessas cônicas e reescrevê-las na forma canônica, ou seja, na forma de uma cônica com centro na origem e reta focal sobre um dos eixos, o que facilita a sua identificação. Para isso, estudamos as técnicas de translação e rotação no plano. Outro objetivo é preparar um curso a ser oferecido aos alunos do Ensino Médio e aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de São Paulo, campus Birigui.

PALAVRAS-CHAVE: Cônicas; Equação do 2º grau; Translação; Rotação.

TRANSLATION AND ROTATION OF CONES IN R^2

ABSTRACT: The present academic work seeks to understand more about conics study, in addition to what is taught in high school. Specifically, this study goes over the conics which center is the origin of the Cartesian System and the focal straight line which is not on one of the axis of the Cartesian System. We believe that it is possible to change the equations of these conics and rewrite them in the canonical form. In other words, rewrite the conics into a conic with the center at the origin and focal straight line on one of the axes, which facilitates its identification. Due to these points, we study the techniques of translation and rotation in the plane. Another objective is to prepare a course to offer for high school students and students of the Mathematics Degree course of the Federal Institute of São Paulo, Birigui campus.

KEYWORDS: Conics; 2nd degree equation; Translation; Rotation.

INTRODUÇÃO

O estudo das cônicas e das suas propriedades geométricas teve início ainda na Antiguidade. Porém, seu estudo sistemático se dá com Apolônio de Perga (260-190 a.C.), e registrado na obra "Cônicas". Apolônio mostra que, a partir de um cone reto e com base circular, obtêm-se secções cônicas como a elipse, a hipérbole e a parábola (KATZ, 2010).

No entanto, o estudo analítico das cônicas só aconteceu com Pierre de Fermat (1601-1665), que determinou equações simples para a hipérbole, a elipse e a parábola, expressas por equações do 2º grau (SILVEIRA, 2017). Tais equações, quando ensinadas no Ensino Médio, resumem-se àquelas em que a reta focal está sobre um dos eixos cartesianos ou é paralela a um deles, neste caso, apresentadas por uma fórmula pronta ou identificadas pelo método do completamento de quadrados, sem uma devida explicação (CAMPOLINO, 2014).

O objetivo dessa pesquisa foi estudar o conjunto solução de equações do 2º grau da forma $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com coeficientes reais, sendo A, B e C não simultaneamente nulos, mostrando tratar-se de cônicas. Para isso, utilizamos as técnicas de translação e rotação no plano.

MATERIAL E MÉTODOS

Propôs-se para esse trabalho um estudo sistemático com pesquisa exploratória em livros e dissertações relacionados ao tema, além de materiais disponíveis na internet. O desenvolvimento do trabalho tem sido acompanhado de forma semanal por meio de seminários.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

De maneira geral, uma cônica é o conjunto de pontos $P(x, y)$ do plano tais que $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com A, B, C, D, E e F números reais, e A, B e C não simultaneamente nulos.

No Ensino Médio, estudam-se cônicas com reta focal sobre um dos eixos do sistema cartesiano. Sendo assim, são comuns exercícios que abordam a identificação de cônicas cujas equações são, por exemplo, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$ ou $y^2 = 16x$, que representam, respectivamente, uma elipse, uma hipérbole e uma parábola, todos com reta focal sobre o eixo das abscissas e centro na origem do sistema cartesiano.

E quando isso não ocorre, ou seja, quando nos deparamos com equações do tipo $x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 4 = 0$, $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 16 = 0$ ou $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0$?

Para esses casos, necessitamos passar de um sistema de coordenadas adotado inicialmente para outro mais conveniente. Na pesquisa, a maneira como enfrentamos esse problema de se estabelecer relações entre as “antigas” e as “novas” coordenadas foi através da translação e da rotação de eixos coordenados.

Translação

Consideramos no plano Oxy um ponto $O'(k, h)$ e, a partir dele, criamos um novo sistema cartesiano $Ox'y'$ tal que os eixos $O'x'$ e $O'y'$ tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy. Seja $P(x, y)$ em Oxy e $P(x', y')$ em $O'x'y'$. De acordo com a figura, temos as equações de translação das antigas para as novas coordenadas $x = x' + k$ e $y = y' + h$.

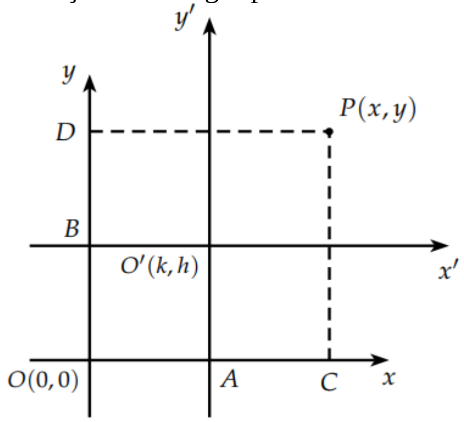

FIGURA 1. Translação dos eixos

Assim, aplicando tais equações para a identificação da cônica $x^2 + 4y^2 + 4x + 8y + 4 = 0$, cujo gráfico está representado na figura 2 abaixo, obtemos:

$$(x' + k)^2 + 4.(y' + h)^2 + 4.(x' + k) + 8.(y' + h) + 4 = 0$$

$$(x')^2 + 4.(y')^2 + (2k + 4)x' - (8h + 8)y' + k^2 + 4h^2 + 4k + 8h + 4 = 0 \qquad \text{(I)}$$

Eliminando os termos de grau 1, tem-se então $2k + 4 = 0$ e $8h + 8 = 0$, donde $k = -2$ e $h = -1$. Substituindo esses valores em (I), obtemos a equação

$$(x')^2 + 4.(y')^2 = 4,$$

que representa uma elipse com centro no ponto (-2, -1).

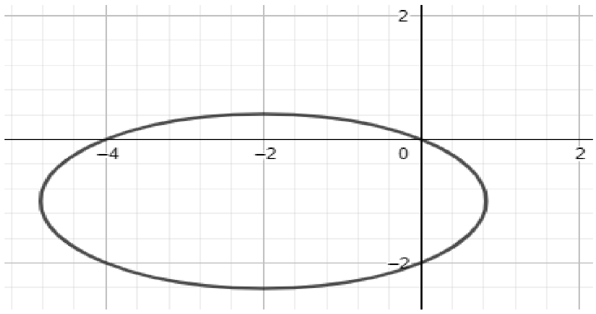

FIGURA 2. Gráfico da elipse transladada

Rotação

Consideremos o plano Oxy e seja θ o ângulo de rotação o qual é obtido um novo sistema cartesiano $O\bar{x}\bar{y}$, tal que os eixos $O\bar{x}$ e $O\bar{y}$ tenham a mesma unidade de medida de Ox e Oy.

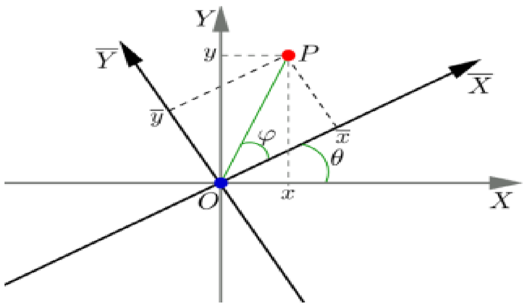

FIGURA 3. Rotação dos eixos

Sendo P um ponto qualquer do plano, com coordenadas (x, y) e $(\bar{x}, \bar{y})$, respectivamente, em Oxy e $O\bar{x}\bar{y}$, temos:

$$\bar{x} = r.\cos(\varphi) \text{ e } \bar{y} = r.\text{sen}(\varphi) \qquad \text{(II)}$$

$$x = r.\cos(\theta).\cos(\varphi) - r.\text{sen}(\theta).\text{sen}(\varphi) \text{ e } y = r.\text{sen}(\theta).\cos(\varphi) + r.\cos(\theta).\text{sen}(\varphi) \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (II) em (III), obtêm-se as equações de rotação

$$x = \bar{x}.\cos(\theta) - \bar{y}.\text{sen}(\theta) \text{ e } y = \bar{x}.\text{sen}(\theta) + \bar{y}.\cos(\theta).$$

Aplicando, por exemplo, tais equações em $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 16 = 0$, cujo gráfico está representado na figura 4 abaixo, obtemos:

$$3.\left[\bar{x}.\cos(\theta) - \bar{y}.\text{sen}(\theta)\right]^2 - 2.\left[\left(\bar{x}.\cos(\theta) - \bar{y}.\text{sen}(\theta)\right).\left(\bar{x}.\text{sen}(\theta) + \bar{y}.\cos(\theta)\right)\right] +$$
$$3.\left[\bar{x}.\text{sen}(\theta) + \bar{y}.\cos(\theta)\right]^2 - 16 = 0,$$

que, após o seu desenvolvimeto, resulta em

$$\left[3.\cos^2(\theta) - 2.\cos(\theta).\text{sen}(\theta) + 3.\text{sen}^2(\theta)\right].\bar{x}^2 + 2.\left[-2.\cos^2(\theta) + 2.\text{sen}^2(\theta)\right].\bar{x}\bar{y} +$$

$$3.\left[\operatorname{sen}^2(\theta) + 2.\operatorname{sen}(\theta).\cos(\theta) + 3.\cos^2(\theta)\right]\overline{y}^2 - 16 = 0.$$

Como queremos eliminar o termo $\overline{x}\,\overline{y}$ desta última, então $-2.\cos^2(\theta) + 2.\operatorname{sen}^2(\theta) = 0$, donde obtemos $\theta = 45^0$. Substituindo tal valor na igualdade acima, obtemos

$$\overline{x}^2 + 2.\overline{y}^2 = 8,$$

que representa uma elipse centrada na origem do sistema cartesiano.

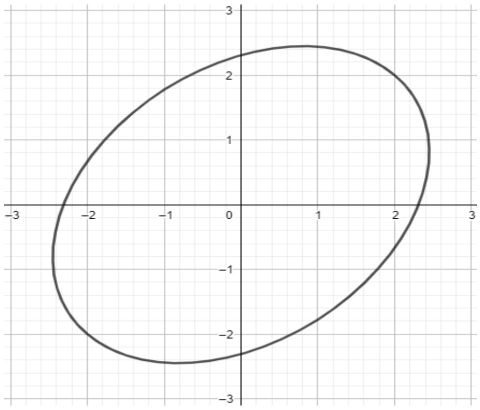

FIGURA 4. Gráfico da elipse rotacionada

Para facilitar a determinação do ângulo de rotação e, consequentemente, das equações de transformação de coordenadas, estudamos o seguinte teorema, cuja demonstração encontra-se em DELGADO et al, (2017).

Teorema: A equação geral do 2º grau nas variáveis x e y $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, quando $B \neq 0$, pode ser sempre transformada na equação $\overline{A}\overline{x}^2 + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0$, onde falta o termo $\overline{x}\,\overline{y}$, por rotação dos eixos coordenados do ângulo positivo θ tal que $\begin{cases} \operatorname{tg}(2\theta) = \dfrac{B}{A - C}, & \text{se } A \neq C \\ \theta = 45°, & \text{se } A = C \end{cases}$.

Assim, usando o teorema acima a fim de determinar qual cônica representa a equação $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0$, cujo gráfico se encontra na figura 5 abaixo, percebemos que $A = 9, B = -24$ e $C = 16$ e, como $A \neq C$, então

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{24}{7}.$$

Daqui obtemos

$$\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{24}{25} \text{ e } \cos(2\theta) = \frac{7}{25}.$$

Sabendo que $\operatorname{sen}^2(\theta) = \dfrac{1 - \cos(2\theta)}{2}$ e $\cos^2(\theta) = \dfrac{1 + \cos(2\theta)}{2}$, e considerando o fato de $0^0 < \theta < 90^0$, obtemos

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{3}{5} \text{ e } \cos(\theta) = \frac{4}{5}.$$

Daí, as equações de rotação são

$$x = \bar{x}.\cos(\theta) - \bar{y}.\text{sen}(\theta) = \frac{4}{5}\bar{x} - \frac{3}{5}\bar{y} \qquad \text{e} \qquad y = \bar{x}.\text{sen}(\theta) + \bar{y}.\cos(\theta) = \frac{3}{5}\bar{x} + \frac{4}{5}\bar{y}.$$

Substituindo as igualdades acima em $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 40x - 30y = 0$, obtemos

$$9.\left(\frac{4}{5}\bar{x} - \frac{3}{5}\bar{y}\right)^2 - 24.\left(\frac{4}{5}\bar{x} - \frac{3}{5}\bar{y}\right).\left(\frac{3}{5}\bar{x} + \frac{4}{5}\bar{y}\right) + 16.\left(\frac{3}{5}\bar{x} + \frac{4}{5}\bar{y}\right) - 40.\left(\frac{4}{5}\bar{x} - \frac{3}{5}\bar{y}\right) -$$

$$30.\left(\frac{3}{5}\bar{x} + \frac{4}{5}\bar{y}\right) = 0$$

que, após o seu desenvolvimento, resulta em

$$\bar{y}^2 = 2\bar{x},$$

ou seja, uma parábola.

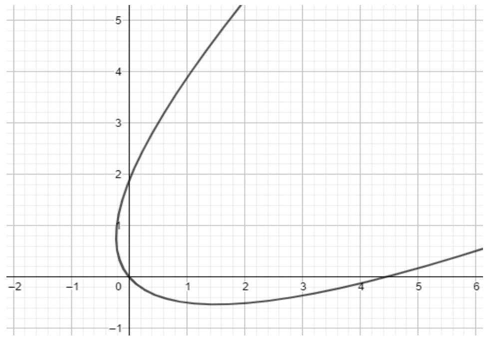

FIGURA 5. Gráfico da parábola rotacionada

CONCLUSÕES

Utilizando-se apenas de translação e rotação no plano, além de trigonometria, percebeu-se que é possível identificar qual é a cônica representada por uma equação do 2º grau. Notou-se também que o estudo das cônicas não deveria ser restrito àquelas centradas na origem e reta focal em um dos eixos. Afinal de contas é enriquecedor o estudo da translação e rotação no plano, além de poder estender tal estudo para a construção de outras curvas estudadas no Ensino Médio, como os gráficos de funções quadráticas, trigonométrica, modular, exponenciais, logarítmicas, etc.

No que se refere à continuação deste trabalho, a etapa seguinte será a elaboração de um Curso sobre translação e rotação de cônicas para alunos do Ensino Médio e do Curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de São Paulo, campus Birigui.

REFERÊNCIAS

CAMPOLINO, M. L. Translação e rotação de cônicas em R^2. 2014. 55f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade de Brasília, Brasília.

DELGADO, J., et al. Geometria analítica. 2ª Edição. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

IEZZI, G. Fundamentos da matemática elementar. São Paulo: Atual, 2005. V. 7.

KATZ, V.História da Matemática. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

MACHADO, A.S. Matemática: temas e metas, vol. 5: Geometria Analítica e Polinômios. São Paulo: Atual, 1986.

SILVEIRA, L. Classificação de cônicas. 2017. 94 f. Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.