A CONSTRUÇÃO DO CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS VIA SEQUÊNCIAS DE CAUCHY

JOAO V. P. BRAMBILA[1], REGIS L. B. STABILE[2]

[1] Graduando em Licenciatura em Matemática, Orientando PIVICT, IFSP, Câmpus Birigui, joao.brambila@aluno.ifsp.edu.br
[2] Doutor em Matemática, UNICAMP, registabile@ifsp.edu.br
Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.02.00-0 Análise

RESUMO: Por muito tempo, acreditou-se que quaisquer duas grandezas fossem sempre comensuráveis. Foi na Grécia, com a escola pitagórica, que se descobriu a existência segmentos incomensuráveis, o que trouxe à tona o conhecimento dos números irracionais. Durante muito tempo, evitou-se trabalhar com números irracionais e apenas 2500 anos depois foi possível estabelecer a construção axiomática dos "números reais" - expressão atribuída a René Descartes (1591-1650)

Algumas construções axiomáticas foram apresentadas ao longo do tempo, por Charles Méray (1835-1911), Karl Weierstrass (1815-1897) e Richard Dedekind (1831-1916). Abordaremos a construção devida a Cantor, que utiliza como ferramenta classes de equivalência de sequências de Cauchy, como explicitaremos ao longo do texto.

PALAVRAS-CHAVE: Conjunto dos números reais; sequências de Cauchy; corpo ordenado completo.

CONSTRUCTION OF THE SET OF REAL NUMBERS FROM CAUCHY SEQUENCES

ABSTRACT: For a long time, it was believed that any two quantities were always commensurable. It was in Greece, with the Pythagorean school, that the existence of incommensurable segments was discovered, which brought to light the knowledge of irrational numbers. For a long time, it was avoided working with irrational numbers and only 2500 years later it was possible to establish the axiomatic construction of "real numbers" - an expression attributed to René Descartes (1591-1650)

Some axiomatic constructions were introduced over time, by Charles Mércy (1835-1911), Karl Weierstrass (1815-1897) and Richard Dedekind (1831-1861). We will approach the construction due to Cantor, which makes use of Cauchy's sequences equivalence classes as a tool, as we will explain throughout the text.

KEYWORDS: Set of real numbers; Cauchy sequences; complete ordered field.

INTRODUÇÃO

Em todos os momentos da evolução humana ao longo da história, o conceito de "número" esteve intrinsicamente ligado ao dia a dia dos homens. Os números naturais, inteiros e racionais (tratados como razões entre inteiros) têm sua origem nas atividades de contagem e medida. A escola pitagórica, nesse caso, adotava os números também com caráter místico-religioso, baseando sua visão de mundo em relações numéricas, das quais viria a harmonia do universo. Como parte de sua fé, os pitagóricos criam que, tomando duas medidas quaisquer, seria possível encontrar uma medida pequena o suficiente que servisse de unidade para expressar ambas. Assim, elas seriam ditas comensuráveis, porque podem ser mensuradas por uma unidade em comum. Porém, essa proposição provou-se falsa, de modo a existirem pares de medidas que não satisfazem a comensurabilidade, sendo então incomensuráveis. Por exemplo, temos a diagonal de um quadrado e o seu lado.

A partir dos números incomensuráveis, temos a noção de números irracionais, o que mostra uma espécie de falta no conjunto dos racionais, que a princípio se supunham completos. Surge, então, a necessidade de classificar uma nova natureza de números os quais supram essa falta, que são os números reais. Assim, uma questão que concerne ao estudo do conjunto dos números reais é a sua construção, isto é, como definir, a partir de conjuntos previamente conhecidos, um novo conjunto numérico que, munido das operações usuais de soma e produto, mantenha a ordenação e todas as propriedades estruturais algébricas destes conjuntos previamente existentes e ainda, satisfaça propriedades adicionais (como completude) que o distingua de todos os outros. Para tanto, uma das construções mais conhecidas é a de Georg Cantor (1845-1918), que faz uso de classes de equivalência de sequências racionais de Cauchy.

MATERIAL E MÉTODOS

Foi realizada uma revisão bibliográfica sobre o tema em revistas acadêmicas científicas, livros, dissertações de mestrado acadêmico e profissional, disponíveis on-line e/ou impressas, reunindo e analisando os dados encontrados, com o objetivo de construir um material que sirva de subsídio para alunos da Matemática e áreas correlatas introduzirem seus estudos no tema abordado nesta pesquisa.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Axiomaticamente, o conjunto R dos números reais, munido das operações usuais de soma (+) e produto (·) é definido como um corpo ordenado completo. Isto é, satisfaz os axiomas de corpo, ordenação e completude.

Para os axiomas de corpo, temos que, para quaisquer elementos x, y, z de R, são válidos:

Axiomas da adição:

(A1) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

(A2) $x + y = y + x$,

(A3) Existe um único elemento em R, denotado por 0, tal que $x + 0 = x$

(A4) Existe um único elemento em R, denotado por $-x$, tal que $x + (-x) = 0$.

Axiomas da multiplicação:

(M1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

(M2) $x \cdot y = y \cdot x$,

(M3) Existe um único elemento em R, denotado por 1, com $1 \neq 0$, tal que $x \cdot 1 = x$

(M4) Existe um único elemento em R, denotado por x^{-1}, tal que $x \cdot x^{-1} = 1$ para todo $x \neq 0$.

Axioma da distributividade:

(D1) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Como corpo ordenado, temos que é possível tomar um subconjunto destacado R_+ de R, denominado conjunto dos elementos positivos de R, tal que:

P1) Para quaisquer x, y em R_+, $x + y$ e $x \cdot y$ pertencem a R_+;

P2) Para qualquer x em R, ocorre somente uma das alternativas:

i) x está em R_+ ii) $x = 0$ iii) $-x$ está em R_+

Para a completude, R satisfaz a condição de que qualquer subconjunto X não-vazio de R limitado superiormente possui supremo em R. Isto é, existe b em R, chamado supremo de X, tal que:

S1) Para todo $x \in X$, temos $x \leq b$

S2) Se $c \in R$ é tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, então $b \leq c$

Em relação a sequências, como convenção, usaremos (a_n) para indicar a sequência a e a_n para indicar o n-ésimo termo de a. Com isso, temos a definição de uma sequência de Cauchy:

Definição: Uma sequência (a_n) é de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe M natural tal que

$$m, n > M \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

Em outras palavras, ao tomarmos índices suficientemente grandes, a distância entre dois termos de (a_n) se torna arbitrariamente pequena.

Denotamos por S_Q o conjunto de todas as sequências de Cauchy de números racionais. Em S_Q, definimos a relação binária ~ de forma que $(a_n) \sim (b_n)$ se, e somente se, $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0$. Ou seja, ao tomarmos índices suficientemente grandes, a diferença entre os termos de (a_n) e (b_n) se torna arbitrariamente pequena. Um exemplo de duas sequências em S_Q que se relacionam por ~ são x = (1, 1, 1, 1, ...) e y = ($\frac{9}{10}, \frac{99}{100}, \dots, \frac{10^n-1}{10^n}$, ...).

É possível verificar que ~ define uma relação de equivalência no conjunto S_Q das sequências de Cauchy, ou seja, ~ satisfaz as seguintes propriedades para todos x, y, z em S_Q:

E1) (Reflexiva) $x \sim x$

E2) (Simétrica) se $x \sim y$, então $y \sim x$

E3) (Transitiva) se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$

Isso nos permite escrever x = y para indicar que $x \sim y$. Com isso, podemos definir classes de equivalência de elementos de S_Q.

Definimos uma classe de equivalência $[(x_n)]$ como o conjunto de todas as sequências de S_Q que se relacionam com (x_n) por meio da relação ~, isto é:

$$[(x_n)] = \{(y_n) \in S_Q;\ (y_n) = (x_n)\}$$

Dessa forma, é possível definir o conjunto S, a que chamaremos conjunto de Cauchy, formado por todas as classes de equivalência de S_Q, ou seja:

$$S = \{[(x_n)];\ (x_n) \in S_Q\}$$

Podemos verificar que, tomando duas sequências (x_n), (y_n) em S_Q, as sequências formadas pela soma e o produto de (x_n) e (y_n) termo a termo são de Cauchy. Isto é, as sequências

$(x_n + y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n, \dots)$ $\qquad$ $(x_n \cdot y_n) = (x_1 \cdot y_1, \dots, x_n \cdot y_n, \dots)$

são de Cauchy.

Assim, definimos a soma $+: S \times S \to S$ e o produto $\cdot: S \times S \to S$ como

$[(x_n)] + [(y_n)] = [(x_n + y_n)]$ $\qquad$ $[(x_n)] \cdot [(y_n)] = [(x_n \cdot y_n)]$

Tomando $[(x_n)] = [(x'_n)]$ e $[(y_n)] = [(y'_n)]$, verificamos que $[(x_n + y_n)] = [(x'_n + y'_n)]$ e $[(x_n \cdot y_n)] = [(x'_n \cdot y'_n)]$, o que demonstra que as aplicações + e · estão bem definidas em S.

Assim, é possível verificar que S, munido das operações acima definidas, satisfaz as propriedades da estrutura algébrica de corpo. A demonstração dessas propriedades decorre do fato de os termos das sequências de S_Q serem racionais e o conjunto Q dos racionais constituir um corpo.

Com relação à ordenação, para definirmos o conjunto S_+ dos elementos positivos de S, definimos primeiramente os elementos positivos de S_Q. Consideramos $(x_n) \in S_Q$ positivo quando existem n_0, M naturais tais que $x_n > \frac{1}{M}$ para todo $n > n_0$. Isto é, a partir de um índice suficientemente grande, todos os elementos de (x_n) são positivos (quanto à ordenação dos racionais) e se mantêm maiores que determinado racional suficientemente pequeno.

Um exemplo de elemento positivo de S_Q é a sequência (x_n) em que $x_n = \frac{n+1}{n}$. Já um não-exemplo é a sequência (y_n) em que $y_n = \frac{1}{n}$. Embora todos os termos de (y_n) sejam positivos, eles não satisfazem à definição dada, uma vez que, para todo M natural, basta tomar n = M +1 que temos $y_n = \frac{1}{M+1} < \frac{1}{M}$. Em realidade, (y_n) pertence à classe de equivalência do elemento nulo da soma em S.

Com isso, definimos que $[(x_n)] \in S_+$ quando existe (y_n) positivo em $[(x_n)]$. Tomando $[(x_n)] = [(x'_n)]$ e supondo $[(x_n)]$ positiva, é possível demonstrar que $[(x'_n)]$ também será positiva. Dessa forma, quando uma classe de equivalência for positiva, todas as sequências que a constituem serão positivas.

Tomando índices suficientemente grandes, demonstramos que S_+ é fechado para a soma e produto, satisfazendo a condição S1 da ordenação. Isto é, somando ou multiplicando dois elementos positivos de S, o resultado também será positivo.

Tomando subsequências de $[(x_n)]$, verificamos que S_+ satisfaz a tricotomia (condição S2 da ordenação). Para mais detalhes quanto a essa demonstração, ver (SILVA, 2018). Isso finaliza a constituição de S como corpo ordenado.

Para demonstrar a completude de S, fazemos uso do Teorema dos Intervalos Encaixados, que nos garante que, em uma sequência de intervalos reais fechados decrescentes, existe um número real que pertence a todos esses intervalos. Isto é, dada uma sequência de intervalos da seguinte forma:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdot\cdot\cdot \supset [a_i, b_i] \supset [a_{i+1}, b_{i+1}] \cdot\cdot\cdot$$

existe c real tal que $c \in [a_n, b_n]$ para todo n natural.

Além disso, dizemos que um subconjunto não vazio T de S é limitado superiormente quando existe $c \in S$ tal que $c \leq t$ para todo $t \in T$. Todo $c \in S$ com essa propriedade é denominado cota superior de T.

Assim, definimos sequências convenientes de elementos de S para mostrar que um conjunto $T \subset S$ não vazio e limitado superiormente possui supremo em S. Sendo c uma cota superior de T e $s_0 \in T$, definimos as sequências t, u e v da seguinte forma:

- $t_1 = c$ e $u_1 = s_0$
- Estando definidos t_n e u_n, teremos $v_n = \frac{t_n + u_n}{2}$
- Se v_n é cota superior de T, então $t_{n+1} = v_n$ e $u_{n+1} = u_n$
- Se v_n não é cota superior de T, então $t_{n+1} = t_n$ e $u_{n+1} = v_n$.

Como $s_0 \leq c$, podemos provar que a sequência (t_n) é não-crescente e a sequência (u_n) é não-decrescente. Isto é, que temos $t_{i+1} \leq t_i$ e $u_{i+1} \geq u_i$ para todo i natural. Além disso, notamos que todo elemento de (t_n) é cota superior de T, enquanto todo elemento de (u_n) pertence a T. Dessa forma, temos:

$$s_0 = u_1 \leq u_2 \leq \cdot\cdot\cdot \leq u_n \leq \cdot\cdot\cdot \leq t_n \leq \cdot\cdot\cdot \leq t_2 \leq t_1 = c$$

O que nos permite escrever:

$$[u_1, t_1] \supset [u_2, t_2] \supset \cdot\cdot\cdot \supset [u_i, t_i] \supset [u_{i+1}, t_{i+1}] \cdot\cdot\cdot$$

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixados, existe b tal que $u_i \leq b \leq t_i$ para todo i natural. Por absurdo, mostramos que b necessariamente é cota superior de T (condição S1). Em seguida, também por absurdo, mostramos que b é a menor cota superior de T (condição S2), o que conclui a demonstração de que b é o supremo de T.

CONCLUSÕES

Concluímos que o conjunto S de Cauchy, formado pelas classes de equivalência de sequências racionais de Cauchy, dotado das operações de soma e produto, bem como a ordenação, definidas acima, satisfaz todas as propriedades de um corpo ordenado completo. Tal construção foi proposta por Cantor e se baseia, como ficou evidenciado neste trabalho, na concepção dos números reais como aproximações sucessivas de números racionais.

Para elucidar com mais clareza essa ideia, para o número irracional *e = 2,718281...*,conhecido como número de Euler, temos que: ao tomarmos (x_n) em que $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, então

$$[(x_n)] \in S \text{ e } \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

REFERÊNCIAS

LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. 14. ed. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012. v. 1.

SILVA, Bruno Pereira da. **Construção dos Números Reais por Sequências de Cauchy e Cortes de Dedekind**. 2018. Dissertação (Mestrado) - UFPB, [*S. l.*], 2018.

AGUILAR, Ivan; DIAS, Marina Sequeiros. A Construção dos Números Reais e suas Extensões. **4º Colóquio da Região Centro-Oeste**, Catalão, novembro 2015.