

## **Análise da Estabilidade de Sistemas Elétricos de Potência: uma aplicação da Matemática à Engenharia Elétrica**

JAMILE GUIDOTTI CAETANO DE SOUZA<sup>1</sup>, BRUNA GONÇALVES DE LIMA<sup>2</sup>, MARCOS AMORIELLE FURINI<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Graduando em Engenharia Elétrica, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus Votuporanga, jamile.guidotti@ifsp.edu.br

<sup>2</sup>Doutora em Engenharia Elétrica, Docente, IFSP, Câmpus Votuporanga, bruna.glv.lima@ifsp.edu.br

<sup>3</sup>Doutor em Engenharia Elétrica, Docente, IFSP, Câmpus Votuporanga, marcos.furini@ifsp.edu.br

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.04.00-3 Matemática Aplicada.

**RESUMO:** A matemática dos anos iniciais das engenharias, tais como a Álgebra Linear, introduzem ferramentas que auxiliam na resolução de problemas importantes das engenharias. Este trabalho apresenta um estudo de caso referente à descrição matemática sobre a estabilidade de sistemas elétricos de potência (SEP). Para isto, aplicam-se os conceitos de diagonalização de matrizes, no qual a análise sobre os autovalores obtidos no processo representam a estabilidade do sistema. Questões sobre frequência e amortecimento também foram estudados como forma de se interpretar o comportamento dinâmico um SEP Multimáquinas. Ao final, é realizada a análise de uma simulação, de acordo com os valores obtidos pela diagonalização.

**PALAVRAS-CHAVE:** Diagonalização; Autovalores; Autovetores; Controladores; Estabilizadores; Matemática aplicada.

### **Stability Analysis of Electric Power Systems: an application of Mathematics to Electrical Engineering**

**ABSTRACT:** The mathematics of the early engineering years, such as Linear Algebra, introduce tools that assist in solving important engineering problems. This work presents a case study referring to the mathematical description on the stability of electric power systems (EPS). For this, the concepts of matrix diagonalization are applied, in which the analysis of the eigenvalues obtained in the process represents the stability of the system. Frequency and damping issues were also studied as a way to interpret the dynamic behavior of a multimachine EPS. At the end, a simulation analysis is performed, according to the values obtained by diagonalization.

**KEYWORDS:** Diagonalization; Eigenvalues; Eigenvectors; Controllers; Stabilizers; Applied math.

## **INTRODUÇÃO**

Segundo (FURINI; ARAUJO, 2008), Sistemas Elétricos de Potência (SEP) podem ser definidos como grandes sistemas de energia que englobam a geração, transmissão e distribuição de energia elétrica. A principal função dos SEP é o suprimento da demanda crescente de energia elétrica, que tem

aumentado exponencialmente no decorrer dos anos, porém, de forma segura, confiável e economicamente viável. Por se tratar de um problema de grande porte, originam-se interações entre diversos tipos de equipamentos que possuem comportamentos dinâmicos diferentes. Essa complexidade tem se mostrado como um impedimento na melhoria dos processos, e, por isso, justifica o estudo de formas de simplificação destes sistemas. Uma ferramenta muito comum para executar a simplificação do SEP, bem como determinar a manutenção de sua estabilidade, é descrevê-lo por meio de modelos matemáticos lineares e realizar análises que incluem conhecimentos da Álgebra Linear. Em particular, para analisar a estabilidade dinâmica, ou seja, quando o sistema é submetido à pequenas perturbações, é necessário linearizar as equações em torno de um ponto de equilíbrio estável. Tais perturbações ocorrem continuamente no sistema elétrico de potência e podem levar o sistema à instabilidade. Para resolver essa situação é necessária a implementação de estabilizadores e controladores.

Neste trabalho, é realizado uma aplicação de conceitos de álgebra linear no estudo de Sistemas Elétricos de Potência, mais especificamente, em problemas de análise de estabilidade a pequenas perturbações, utilizando-se o método da linearização de equações em torno de um ponto de equilíbrio em um sistema de máquina síncrona, porém com enfoque na matemática aplicada. O estudo de caso concentra-se em um modelo de SEP teórico, e a interpretação da simulação dos dados é determinada ao final, de acordo com conceitos de Álgebra Linear.

## MATERIAIS E MÉTODOS

De acordo com (RODRIGUES, 2007), a instabilidade dinâmica de um SEP está relacionada às oscilações eletromecânicas da frequência causada por desbalanços transitórios entre torques elétricos e mecânicos nas máquinas síncronas do sistema. A descrição matemática dos SEP pode ser determinada a partir do conjunto de equações dinâmicas das grandezas mecânicas e elétricas da máquina síncrona, onde a análise de estabilidade dinâmica de um SEP se faz de acordo com a análise dos autovalores da matriz de estados.

Em concordância com (HEFFRON; PHILLIPS, 1952), a descrição matemática dos SEP baseia-se em um conjunto de equações dinâmicas das grandezas mecânicas da máquina síncrona como a velocidade angular ( $\omega$ ), o ângulo interno ( $\delta$ ), o comportamento dinâmico da tensão interna da máquina síncrona ( $E'_{qk}$ ), a tensão de campo do gerador ( $\dot{E}_{fdk}$ ) e equações algébricas já linearizadas que incluem os fluxos de potência ativa nas linhas de transmissão ( $P_{km}$ ) e reativa ( $Q_{km}$ ) torno de um ponto de equilíbrio.

Segundo (BORGES, 2017), o comportamento dinâmico da variável de estado pode ser definido como

$$\dot{x} = f(x), \quad (1)$$

em que

$\dot{x}$  - derivada de um ponto.

Utilizando a série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio  $x_e$  e pequenos valores para a perturbação (dinâmica)  $\Delta x = x - x_e$ , obtém-se

$$f(x) \approx \left[ f(x_e) + \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x_e} \cdot (x - x_e) + \dots \quad (2)$$

como uma aproximação quase precisa para a matriz de estados.

Uma vez que  $x_e$  é um ponto de equilíbrio, então  $f(x_e) = 0$ , isto é,  $\dot{x}(0) = 0$ , e, assim:

$$f(x) \approx \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] \cdot \Delta x + \dots \quad (3)$$

Adotando-se que nenhuma trajetória de (1) se afasta significativamente do ponto de equilíbrio  $x_e$ , os termos de ordem superior a 1 podem ser desprezados, reduzindo a Equação (3) a

$$f(x) \approx A\Delta x, \quad (4)$$

em que

$A$  - matriz jacobiana (matriz formada pelas derivadas parciais de primeira ordem da função) de  $f(x)$ , aplicada no ponto  $x_e$ .

Porém, como  $\Delta \dot{x} = \dot{x} - \dot{x}_e = \dot{x}$  implica em

$$f(x) = \dot{x} = \Delta \dot{x} = A \cdot \Delta x, \quad (5)$$

então,  $\Delta \dot{x} = A \cdot \Delta x$  é uma representação aproximada de (1) em uma vizinhança de  $x_e$ .

Ainda de acordo com (BORGES, 2017), a análise dos SEP por meio da matriz de estados (5) ainda pode ser caracterizada, levando-se em consideração os autovalores e autovetores da matriz  $A$ . Para isso, deve-se considerar que

$$\Delta x(t) = \sum_{i=1}^n c_i v_i e^{\lambda_i t} \quad \text{e} \quad \Delta \dot{x}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i v_i e^{\lambda_i t}, \quad (6)$$

em que

$t$  - Um parâmetro tempo;

$c_i$  - Constante;

$\lambda_i$  - Autovalores da matriz Jacobiana;

$v_i$  - Autovetores da matriz Jacobiana.

Substituindo as equações (6) em (5), obtém-se

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i v_i e^{\lambda_i t} = A \sum_{i=1}^n c_i v_i e^{\lambda_i t}. \quad (7)$$

Como  $c_i$  e  $\lambda_i$  são constantes, o problema resume-se em

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i = \sum_{i=1}^n A v_i \Rightarrow \lambda_i v_i = A v_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

desde que  $A$  tenha  $n$  autovalores distintos.

Dessa forma, é possível reescrever a matriz de estados em função dos autovalores e autovetores de  $A$ . Mais ainda, os autovetores geram uma base para as soluções de (5).

Outra implicação importante em termos da Álgebra Linear é que as equações (6) descrevem uma relação dos autovalores com a resposta do SEP: se os autovalores  $\lambda_i$  tiverem parte real negativa, a resposta do sistema será amenizado pelos termos  $e^{\lambda_i t}$ , sendo caracterizado como um sistema estável. Se a parte real de algum dos autovalores  $\lambda_i$  for positiva,  $e^{\lambda_i t}$  adota um crescimento exponencial na resposta, caracterizando um sistema instável. Em consequência, na modelagem do SEP, o autovalor  $\lambda_i = \sigma_i +$

$j\omega_i$  é denominado um "modo de resposta" ou um "modo de oscilação" (caso tenha parte imaginária diferente de zero) do sistema (6). A parte real do autovalor está relacionada com o crescimento ou decaimento exponencial da resposta. Já a parte imaginária fornece a frequência de oscilação do respectivo modo, onde essa frequência é dada em  $Hz$  por

$$f_i = \frac{\omega_i}{2\pi} \quad (9)$$

em que

$f_i$  - frequência de oscilação;

$\omega_i$  - velocidade angular do rotor do gerador  $i$ .

Na prática, de acordo com o valor frequência (9), sabe-se que autovalor é referente a um conjunto ou máquina específica.

O fator de amortecimento de um autovalor  $\lambda_i$  é dado por

$$\zeta_i = \frac{-\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}} \quad (10)$$

em que

$\zeta_i$  - frequência de oscilação.

Isto estabelece uma relação entre a frequência de oscilação de um modo e seu respectivo decaimento. Altos valores de  $\zeta_i$  indicam que a parte imaginária do respectivo autovalor é pequena em relação à sua parte real, ou seja, oscilações bem amortecidas em frequências mais altas tendem a desaparecer mais rapidamente da resposta (BORGES, 2017). A frequência e fator de amortecimento são tratados como questões físicas, neste caso.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 1 apresenta a representação gráfica de um estudo de caso determinado por um SEP teórico (para fins didáticos). O problema é denominado por um sistema multimáquinas de duas áreas, uma vez que o SEP associado possui duas áreas com duas máquinas geradoras em cada área, e tal que essas áreas são interligadas por três grandes linhas de transmissão.

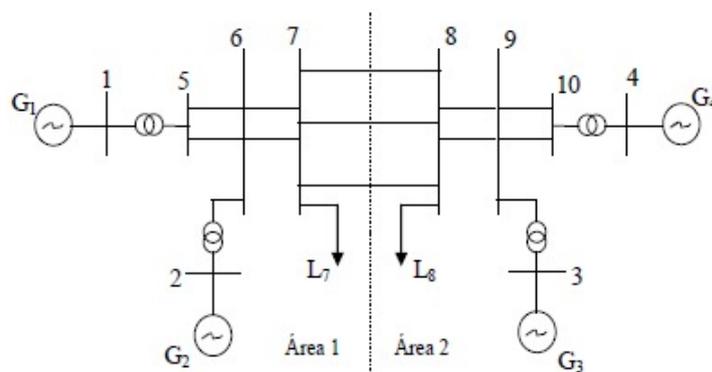


Figura 1: Diagrama Unifilar do Sistema Multimáquinas de duas áreas

Tabela 1: Autovalores Dominantes, Frequência e Coeficiente de Amortecimento ( $\zeta$ )

Autovalores	Frequência (Hz)	$\zeta$
$-0,2356 \pm j6,2956$ (Local 1)	1,0026	0,0374
$-0,1585 \pm j5,8779$ (Local 2)	0,9358	0,0270
$0,0460 \pm j4,1382$ (interárea)	0,6587	-0,0111

Os elementos do sistema que geram a Tabela 1 podem ser obtidos no artigo (FURINI; ARAUJO, 2008). A partir dos dados de simulação adquiridos no trabalho de (MOURA; FURINI; ARAUJO, 2012), e de acordo com a análise da Tabela 1, é possível concluir que os autovalores de parte real negativa mostram-se modos estáveis, e, o de parte real positiva, instável. A partir do valor de cada frequência pode-se dizer que são modos locais, associados à máquinas fisicamente próximas e o interárea que são relacionados à máquinas de outras áreas. Tendo como base o coeficiente de amortecimento, o negativo mostra que esse modo leva o sistema a instabilidade. Em (FURINI; ARAUJO, 2008), é possível obter a modelagem matemática completa.

## CONCLUSÕES

Este trabalho teve como objetivo aplicar a álgebra linear na modelagem de um caso de SEP. A partir dos resultados obtidos, é possível concluir a importância do desenvolvimento teórico para o entendimento da análise de estabilidade destes sistemas. Os autovalores, determinados a partir da diagonalização da matriz  $A$ , mostram qual são os modos estáveis e instáveis do SEP. De acordo com o valor de cada frequência, é possível determinar os modos locais, associados à máquinas fisicamente próximas e o interárea que são relacionados à máquinas de outras áreas. O coeficiente de amortecimento mostra o modo que leva o sistema a instabilidade.

## Referências

- BORGES, R. C. *Um algoritmo para sintonia de controladores robustos para amortecimento de modos intra-planta em sistemas de potência*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2017.
- FURINI, M. A.; ARAUJO, P. B. d. Melhora da estabilidade dinâmica de sistemas elétricos de potência multimáquinas usando o dispositivo facts"thyristor-controlled series capacitor-tcsc". *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, SciELO Brasil, v. 19, n. 2, p. 214–225, 2008.
- HEFFRON, W.; PHILLIPS, R. Effect of a modern amplidyne voltage regulator on underexcited operation of large turbine generators [includes discussion]. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers. Part III: Power Apparatus and Systems*, IEEE, v. 71, n. 3, p. 692–697, 1952.
- MOURA, R. F. d.; FURINI, M. A.; ARAUJO, P. B. d. Estudo das limitações impostas ao amortecimento de oscilações eletromecânicas pelos zeros da ftma de controladores suplementares. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, SciELO Brasil, p. 190–201, 2012.
- RODRIGUES, C. R. *Utilização da modelagem politópica para a avaliação da margem de estabilidade a pequenas perturbações em sistemas de potência*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2007.