

ESPIRÓGRAFO: POSSIBILIDADES MATEMÁTICAS NA EDUCAÇÃO BÁSICA E NO ENSINO SUPERIOR

Douglas Frederico Junqueira¹, Marina Mariano de Oliveira²

¹ Licenciando em Matemática, bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus São José dos Campos, douglas.junqueira@aluno.ifsp.edu.br.

² Docente de Matemática, orientadora PIBIFSP, IFSP, Câmpus São José dos Campos, marina.mariano@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 7.08.04.02-8 Métodos e Técnicas de Ensino

Apresentado no 10º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP
27 e 28 de novembro de 2019 – Sorocaba/SP, Brasil

RESUMO: Este trabalho busca estabelecer um modelo matemático através do qual se possa discutir a influência de cada peça do espirógrafo – um brinquedo de baixo custo, conhecido como “réguia mágica” – na construção das curvas desenhadas por meio dele, as chamadas hipotrocoïdes. Assim, têm-se, como objetivo geral, criar possibilidades que favoreçam o ensino e a aprendizagem dos conteúdos Análise Combinatória, Trigonometria, Geometria Analítica e Teoria dos Números, por meio de material manipulável, e, como objetivos específicos, compreender as relações existentes entre as peças (anéis dentados, engrenagens e pontos internos das engrenagens) do espirógrafo e as curvas formadas por ele, encontrar um modelo matemático que permita entender como o brinquedo constrói as hipotrocoïdes e prever novas figuras a depender de determinadas condições e propor práticas que integrem os três grandes blocos temáticos da Matemática (Números, Geometria e Relações), principalmente no que diz respeito à representação simbólica e noções de contagem, percepção, construção e representação de elementos e formas de figuras planas e interdependência.

PALAVRAS-CHAVE: hipotrocoide; material manipulável; modelagem matemática; régua mágica.

SPIROGRAPH: MATHEMATICAL POSSIBILITIES IN BASIC AND HIGHER EDUCATIONS

ABSTRACT: This paper aims to establish a mathematical model to discuss the influence of each piece of the spirograph (a cheap toy, famous as the “magic ruler”) in the construction of the curves drawn by him, the hypotrochoids. Our overall goal is to promote the teaching and learning of contents Combinatorial Analysis, Trigonometry, Analytical Geometry and Number Theory, using manipulable material, to understand the relationships between the parts (toothed rings, gears and inner points of the gears) and the curves formed by him, find a mathematical model to understand how the toy builds the hypotrochoids and predict new figures depending on certain conditions and propose activities that integrate the three major thematic blocks of Mathematics (Numbers, Geometry and Relations), mainly about symbolic representation and counting notions, perception, construction and representation of elements and shapes of plane figures and interdependence.

KEYWORDS: hypotrochoid; manipulable material; mathematical modeling; magic ruler.

INTRODUÇÃO

De acordo com Weisstein ([2017]), as hipotrocoïdes são roletas traçadas por um ponto fixo de um círculo que rola, sem deslizar, pelo interior de uma circunferência fixa de raio maior. Assim, estas curvas podem ser geradas por um espirógrafo, como os da Figura 1, ao se introduzir, como explica Andrade (2014, p. 1), a ponta de uma caneta em um dos furos da engrenagem e girar este anel por dentro do anel dentado, sem deslizar, até fechar a curva.



FIGURA 1. Dois tipos de espirógrafos (à esquerda, composto por dois anéis dentados e três engrenagens; à direita, composto por um anel dentado e duas engrenagens).

Deste modo, este trabalho faz um estudo desta família de curvas por meio de material manipulável, que, de acordo com Gazire & Rodrigues (2012, p. 188), pode tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas e compreensíveis, uma vez que permite a aproximação da teoria matemática da constatação na prática. Esta questão é reforçada pela modelagem matemática, que, segundo Vertuan (2010, p. 2), consiste, justamente, em partir de um fato real e criar, por meio da análise de dados coletados, uma expressão em linguagem matemática que possa servir de parâmetro para a descrição e a compreensão da realidade.

MATERIAL E MÉTODOS

Por meio do levantamento de referências bibliográficas sobre o assunto, foi possível obter informações a respeito da história do espirógrafo, como contam Chang et al. (2016, p. 3-4) e Martins ([2013]): a ideia do brinquedo foi do matemático Bruno Abakanowicz (polonês, 1852 – 1900), porém quem, de fato, inventou-o foi o engenheiro Denys Fisher (inglês, 1918 - 2002), que o exibiu durante a edição de 1965 da Feira Internacional de Brinquedos de Nuremberg, na Alemanha. Sabe-se, também, que a família das curvas hipotrocoides já vinha sendo estudada desde o século XVII, despertando a atenção de cientistas renomados, como Bernoulli, Newton e Galileu.

Após tomado conhecimento desta perspectiva histórica, foi determinado o modelo matemático que descreve as curvas geradas pelo espirógrafo, baseado em conceitos de Geometria Analítica e de Trigonometria. Assim, para obtermos as equações paramétricas dessas curvas, vamos considerar uma circunferência de raio r e de centro $C = (x_C, y_C)$ – que representa a engrenagem do espirógrafo –, tangente interiormente à outra circunferência de raio $R > r$ – que representa o anel dentado –, centrada na origem O do sistema cartesiano (para qualquer outra posição, obtemos resultados análogos com movimentos rígidos no plano), como mostra a Figura 2.

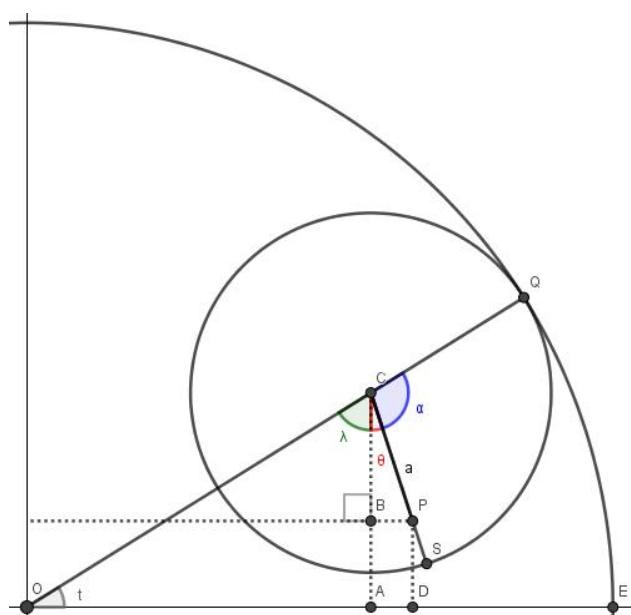


FIGURA 2: Auxílio à demonstração das equações paramétricas da hipotrocoide.

Porém, vamos supor, inicialmente, que a circunferência menor está centrada no eixo das abscissas e que ela gira tangencialmente à maior, em sentido anti-horário e sem deslizar. Consideremos, também, um ponto P interno à circunferência menor – que representa o furo escolhido da engrenagem –, situado a uma distância a de C , e t a medida, em radianos, do ângulo AOC , em sentido positivo, tal que A é a projeção ortogonal de C no eixo das abscissas. Se $P = (x(t), y(t))$, temos

$$\begin{cases} x(t) = OA + AD \\ y(t) = DP = AB = AC - BC \end{cases},$$

tais que D é a projeção ortogonal de P no eixo das abscissas e $B = (x_C, y_P)$. Daí e do triângulo retângulo ΔCAO , temos

$$\begin{cases} x(t) = OC \cdot \cos(t) + BP = (R - r) \cdot \cos(t) + BP \\ y(t) = OC \cdot \sin(t) - BC = (R - r) \cdot \sin(t) - BC \end{cases}.$$

Se considerarmos θ a medida, em radianos, do ângulo BCP , em sentido positivo, temos, do triângulo retângulo ΔPBC , $BC = a \cdot \cos(\theta)$ e $BP = a \cdot \sin(\theta)$. Ou seja,

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cdot \cos(t) + a \cdot \sin(\theta) \\ y(t) = (R - r) \cdot \sin(t) - a \cdot \cos(\theta) \end{cases}.$$

Como $m(SQ) = m(EQ) = R \cdot t$, a medida, em radianos, do ângulo PCQ , em sentido positivo, é $\frac{R \cdot t}{r}$.

Como $OCA + BCP + PCQ = \pi$, temos $\left(\pi - \frac{\pi}{2} - t\right) + \theta + \frac{R \cdot t}{r} = \pi$, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{t \cdot (R - r)}{r}$. Logo, chegamos às equações paramétricas das hipotrocoïdes:

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cdot \cos(t) + a \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t \cdot (R - r)}{r}\right) = (R - r) \cdot \cos(t) + a \cdot \cos\left(\frac{t \cdot (R - r)}{r}\right) \\ y(t) = (R - r) \cdot \sin(t) - a \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{t \cdot (R - r)}{r}\right) = (R - r) \cdot \sin(t) - a \cdot \sin\left(\frac{t \cdot (R - r)}{r}\right) \end{cases}$$

(note que foram usadas relações trigonométricas para arcos complementares), com $t \in \mathbb{R}$, em que R , r e a são previamente definidos.

Na Figura 3, podemos ver alguns exemplos de hipotrocoïdes, em que são pré-definidos valores distintos de R , r e a .

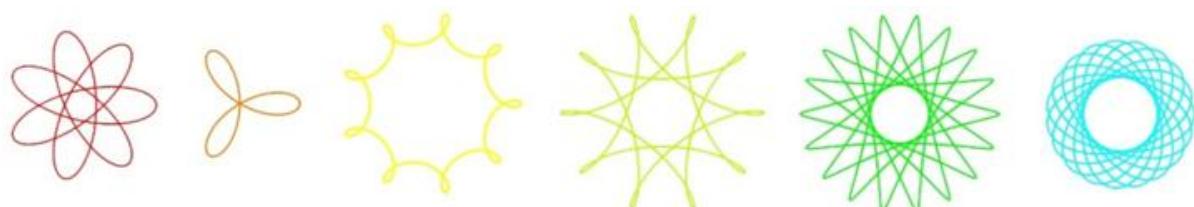


FIGURA 3. Hipotrocoïdes.

Com a determinação deste modelo, foi natural que surgissem interrogações como “Quantas hipotrocoídes são possíveis de se fazer com um espirógrafo?” e “Quando estas curvas se fecham?”. Foram questões como essas que nos levaram, então, a discutir conceitos de Análise Combinatória e de Teoria dos Números.

Em relação à Combinatória, não é difícil perceber que a quantidade de figuras distintas que podem ser formadas depende dos valores possíveis de R , r e a assumirem. Ou seja, no espirógrafo à direita da Figura 1, temos um único anel dentado e duas engrenagens distintas, um com 5 furos e outro com 4. Considerando que não haja valores coincidentes de a para cada r , temos um total de $1 \cdot (5+4) = 1 \cdot 9 = 9$ figuras simples possíveis (sem composição). Já no espirógrafo à esquerda, temos dois anéis dentados distintos e três engrenagens, uma com 11 furos, outra com 19 e outra com 24. Considerando que também não haja coincidências, teremos um total de $2 \cdot (11+19+24) = 2 \cdot 54 = 108$ figuras distintas possíveis. Ou seja, para o cálculo da quantidade de figuras simples distintas possíveis de serem construídas com um espirógrafo, fazemos uso dos princípios aditivo e multiplicativo: somamos as quantidades de furos de cada engrenagem (a diferentes distâncias do respectivo centro – por isso os furos estão dispostos em espiral) e multiplicamos pela quantidade de anéis dentados distintos.

Agora, em relação ao segundo questionamento, isso nos levou a discussões mais profundas, como periodicidade e Teoria dos Números, permitindo-nos chegar a resultados como o período da hipotrocoide, ou seja, quando ela se torna uma curva fechada, e a quantidade de pétalas que esta curva fechada tem: o primeiro é dado por $2\pi \cdot \text{denom}\left(\frac{R}{r}\right)$, em que $\text{denom}\left(\frac{R}{r}\right)$ representa a aplicação que devolve o denominador da fração $\frac{R}{r}$ em sua forma irredutível, e a segunda é dada por $\text{numer}\left(\frac{R}{r}\right)$, ou seja, é dada diretamente pelo numerador da fração $\frac{R}{r}$ também em sua forma irredutível. Com isso, temos, na Figura 4, o exemplo de uma hipotrocoide de parâmetros $R=9$, $r=7$ e $a=3$ (nas mesmas unidades de medida), cujo período é $2\pi \cdot \text{denom}\left(\frac{9}{7}\right) = 2\pi \cdot 7 = 14\pi$ e cuja quantidade de pétalas é $\text{numer}\left(\frac{9}{7}\right) = 9$.

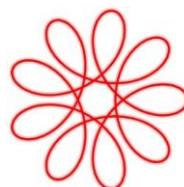


FIGURA 4: Hipotrocoide de parâmetros $R=9$, $r=7$ e $a=3$.

Vale ressaltar que estes últimos resultados somente são válidos se $\frac{R}{r} \in \mathbb{Q}$; caso contrário, a curva não será fechada e seu traço se aproximará, cada vez mais, de uma coroa circular, conforme vai se dando sua construção.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Todos os passos desta investigação nos permitiram criar atividades matemáticas com o espirógrafo. Para o Ensino Fundamental, sugerimos apresentar informações sobre a história do espirógrafo, na intenção de despertar o interesse dos alunos sobre o assunto, enquanto eles brincam livremente com o material. Além disso, pode-se trabalhar com este segmento a parte que trata de Análise Combinatória, visto que, de acordo com São Paulo (2011, p. 63), problemas de contagem devem começar a ser trabalhados no 8º ano.

Já para o Ensino Médio, podemos propor, inicialmente, as mesmas atividades descritas para o Fundamental, mas, na 3^a série do segmento, podemos introduzir a demonstração das equações paramétricas da hipotrocoide, visto que se espera que os alunos já tenham tido contato com Trigonometria e com Geometria Analítica. É interessante, também, mostrar a eles como as hipotrocoides podem ser construídas com tais equações no GeoGebra – *software* de matemática dinâmica, que combina conceitos de geometria e álgebra –, o que pode tornar mais atraente a atividade, tendo em vista que os valores dos parâmetros R , r e a poderão ser alterados com mais facilidade.

Por fim, para o Ensino Superior, pode-se discutir todas as atividades sugeridas anteriormente, mas, aqui, cabe também a discussão sobre as demonstrações que levaram à conclusão do período da hipotrocoide e do número de pétalas que ela possui quando fechada, de forma a trabalhar conceitos mais complexos, como periodicidade de funções e Teoria dos Números.

CONCLUSÕES

Um dos grandes desafios da Educação Matemática que vem sendo debatido nas últimas décadas é aliar o conhecimento teórico com a prática. Utilizar-se de materiais didáticos diversificados pode tornar este caminho menos nebuloso e, por isso, o espirógrafo pode ser visto como uma ferramenta poderosa no ensino de Matemática. Assim, este trabalho buscou, por meio deste material manipulável, propor atividades, em várias etapas da Educação, que consolidem conhecimentos já empregados, que estejam envolvidas em processos de reflexão e de abstração e que mostrem possibilidades de aplicabilidade dos conhecimentos. Apesar de existir uma divisão natural das atividades por conta do conhecimento prévio do aluno até então, todas elas trazem a mesma essência, que é relacionar as hipotrocoides com temas cotidianos, como a arte geométrica e a criptografia.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Professora Marina Mariano de Oliveira, pela paciência, pela oportunidade e pela liberdade dada no processo de pesquisa e desenvolvimento deste trabalho, sem deixar de me guiar e de me dar apoio. Também ficam minhas sinceras gratulações ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP), que, mesmo em meio a tantas dificuldades no atual cenário educacional, conseguiu me auxiliar financeiramente em todo o processo, por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica e Tecnológica do IFSP (PIBIFSP), e me fornecer condições suficientes de trabalho.

REFERÊNCIAS

- ANDRADE, L. N. D. **Um brinquedo chamado espirógrafo.** João Pessoa: Universidade Federal da Paraíba, 2014.
- CHANG, P. et al. **Modelagem matemática com desenhos construídos pela régua mágica.** Toledo: IV Encontro de Iniciação Científica do *campus* Toledo na Universidade Tecnológica Federal do Paraná, 2016.
- GAZIRE, E. S.; RODRIGUES, F. C. **Reflexões sobre uso de material didático manipulável no ensino de matemática: da ação experimental à reflexão.** Florianópolis: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 2012.
- MARTINS, R. **O espirógrafo.** Lisboa: Isto é matemática, [2013]. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=ieVefMuW2jA>. Acesso em: 30 ago. 2019.
- SÃO PAULO. **Curriculum do estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias.** São Paulo: Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, 2011.
- VERTUAN, R. **Modelagem matemática na Educação Básica.** Maringá: IV Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática, 2010.
- WEISSTEIN, E. **Hypotrochoid.** Disponível em <http://mathworld.wolfram.com/Hypotrochoid.html>. Acesso em: 30 ago. 2019.