ESTUDOS E APLICAÇÕES DOS MÉTODOS DE BUSCA UNIDIMENSIONAL

GABRIELA CALIÁRI GODOY[1], LEANDRO VINÍCIUS DA SILVA LOPES[2]

[1] Graduanda em Licenciatura em Física, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Campus Birigui, caliarigabriela@gmail.com.
[2] Docente no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP, Câmpus Birigui, leandrovi@ifsp.edu.br.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.03.02.02-6 Modelos Analíticos e de Simulação

Apresentado no
10° Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP
27 e 28 de novembro de 2019- Sorocaba-SP, Brasil

RESUMO: Este projeto visa estudar os métodos de busca unidimensional mais conhecidos, como busca dicotômica, segmento áureo, método de Fibonacci, método da bissecção, método de Newton, método da falsa posição e ajuste cúbico. Assim, na primeira metade o aluno estudará a parte teórica da otimização e na segunda metade utilizará o que fora aprendido para aplicar na solução de problemas. Como a solução de problemas numéricos exige várias iterações, será necessário utilizar ferramentas computacionais para encontrar o ponto de mínimo através dos métodos de busca unidimensional.

PALAVRAS-CHAVE: busca unidimensional; métodos; máximos e mínimos.

STUDIES AND APPLICATIONS OF ONE-DIMENSIONAL SEARCH METHODS

ABSTRACT: This project aims to study the best known one-dimensional search methods, such as dichotomous search, golden segment, Fibonacci method, bisection method, Newton method, false position method and cubic adjustment. Thus, in the first half the student will study the theoretical part of optimization and in the second half will use what was learned to apply in problem solving. Since numerical problem solving requires multiple iterations, it will be necessary to use computational tools to find the minimum point through one-dimensional search methods.

KEYWORDS: one-dimensional search; methods; highs and lows.

INTRODUÇÃO

A área de otimização é de grande interesse nas Ciências Exatas, pois em várias situações há a necessidade de se encontrar um ponto de mínimo (ou máximo) nas funções. Na Física, por exemplo, sabe-se que entre todos os caminhos ao longo dos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro dentro de um tempo especificado, o percorrido é aquele que minimiza a integral temporal da função Lagrangiana do sistema.

A função a ser otimizada é chamada de função objetivo e nela deve conter a variável ou as variáveis otimizáveis. As funções que envolvem limitações na otimização são as funções de restrição. A literatura Matemática traz vários métodos de otimização e, dentro destes, para encontrar os pontos de mínimo existem os chamados métodos de busca. Estes podem ser unidimensionais, se a função objetivo tiver uma única variável, ou multidimensionais, para o caso de mais variáveis.

Entre os métodos de busca unidimensional há aqueles que utilizam derivadas (método de Newton) e os que não as usam (método de Fibonacci). Todos eles conseguem chegar muito próximos do ponto de mínimo e utilizar um ou outro depende das condições para resolver o problema. Seja a função objetivo f(x), que pode estar sujeita a restrições, que são as funções g(x). Esta determina um conjunto que soluções viáveis, dentre elas há aquela que fornece o valor otimizado de f(x), que é a solução ótima.

Seja $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)^T$ um vetor e o problema geral: minimizar f(x) sujeito a $g_i(x) = b_i$ com i =1,2,…,m. O conjunto de soluções viáveis é $S = \{x \mid g_i(x) = b_i, i = 1,2,\ldots,m\}$ onde, dentro dessa solução há um ponto x^* tal que $f(x^*)$ seja mínimo. Caso as funções f(x) e g(x) sejam lineares tem-se um problema de programação linear a ser resolvido. Se pelo menos uma das duas funções não for linear, tem-se um problema de programação não-linear.

MATERIAL E MÉTODOS

Os materiais a serem utilizados são livros de Matemática que abordem o assunto de otimização e um computador que tenha um software (IDE) que permita a escrita e compilação do código de programação para implementar os métodos de busca unidimensional de modo a obter o ponto ótimo das funções.

A estratégia metodológica é estudar e entender os conceitos de otimização, os conceitos de método de busca unidimensional e finalmente implementar códigos computacionais que encontrem o ponto que torna a função otimizada. A parte final do trabalho é aplicar estes métodos à solução de algum problema da Física ou da Matemática. Com isso, consegue-se mostrar a aplicabilidade do método.

Para este trabalho de pesquisa, e como uma forma inicial de conhecer os problemas de otimização, considera-se adequado estudar os problemas irrestritos, ou seja, utilizar-se apenas a função f(x). Utilizando metodos computacionais, faz-se várias iterações utilizando esta função, é gerada uma sequência de pontos $x_1, x_2, x_3,\ldots,x_k$, que tenderão ao ponto x^*, que é o ótimo do problema. Dependendo da função e do intervalo [a,b] analisado ter-se-á um ponto de mínimo local ou de mínimo global, cujas definições são:

Ponto de mínimo local: O ponto x^*, que pertence a um conjunto solução S, é um ponto de mínimo local da função f(x) se existir um intervalo $\varepsilon > 0$ tal que $f(x) > f(x^*)$ para todo x pertencente a S, tal que $|x - x^*| < \varepsilon$. Se $f(x) > f(x^*)$, então x^* é um mínimo local estrito.

Ponto de mínimo global: O ponto x^*, que pertence a um conjunto solução S, é um ponto de mínimo global da função f(x) se $f(x) > f(x^*)$ para todo x pertencente a S, tal que $x \neq x^*$. Assim, se $f(x) > f(x^*)$, então x^* é um mínimo global estrito.

Pelo método iterativo, para se encontrar o mínimo de uma função é necessário um ponto inicial x^0. O próximo ponto x^k é encontrado somando-se o ponto anterior a um vetor **d**, que indica a direção a seguir. Dá-se um passo α_k $(0 \leq \alpha_k \leq 1)$ na direção de **d** e chega-se, então, a x^k. Dessa forma, pode-se escrever que $x^k = x^0 + \alpha_k \mathbf{d}^k$. Deve-se lembrar que, para os métodos de busca a serem utilizados, x deve estar sempre dentro do conjunto de soluções S.

Para o estudo de otimização, é imprescindível o uso das propriedades de convexidade. Se uma função não for convexa, não é possível garantir que será encontrado o ponto de mínimo da função. Um conjunto qualquer S é convexo se, e somente se para quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a S e para qualquer α pertencente a **R**, sendo $0 \leq \alpha_k \leq 1$, a $x_1 + (1 - \alpha)\, x_2$ pertencente a S está contido no $\mathbf{R^n}$.

Uma função é definida como convexa sobre um conjunto convexo S se, e somente se para dois pontos quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a S, $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$, onde α pertencente a **R** e $0 \leq \alpha \leq 1$. Se $(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$, então a função f(x) é estritamente convexa.

Se a função tiver as condições de otimalidade satisfeitas, pode-se utilizar métodos de busca para encontrar o ponto de mínimo (ou máximo) da função. De maneira geral, nos processos de busca parte-se de um ponto inicial x^0, caminha-se um certo passo em uma direção viável pré-determinada, determina-se um novo ponto x^k, determina-se uma nova direção viável e o processo iterativo repete-se até encontrar o mínimo da função.

Nos métodos de busca que não utilizam derivadas busca-se o mínimo em um determinado intervalo [a,b]. A cada iteração é excluída uma parte deste onde se garante que o mínimo não está. Este processo é repetido até que se tenha um intervalo infinitesimal onde há a garantia que o mínimo está lá. Como o processo é iterativo, pode-se utilizar ferramentas computacionais para este fim.

Para os métodos de busca que utilizam derivadas o intervalo de mínimo também é buscado em um intervalo [a,b], porém não há a necessidade de excluir partes dele, tal como nos outros métodos. Estes métodos convergem para o ponto de mínimo com menos iterações que os outros.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram utilizadas várias funções para cada método de busca, porém, apresentamos apenas duas aqui. As funções são:

$f_1(x) = x^2 + 2x$

$f_2(x) = x^3 – x^2 – 4x + 4.$

Através dos gráficos, e também analiticamente, é possível ver que o ponto de mínimo de f_1 é -1 e de f_2 é 1,5. Abaixo está listado os pontos de mínimos utilizando vários métodos de busca unidimensional.

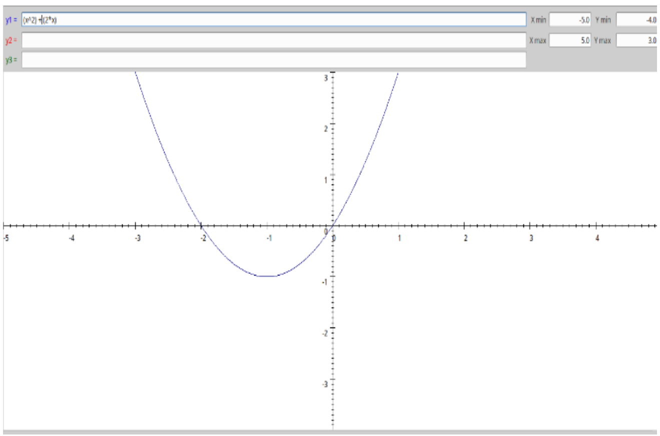

Figura 1: gráfico de $x^2 + 2x$.

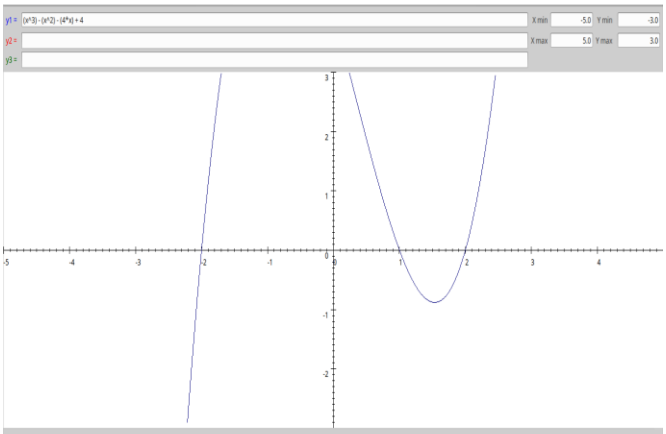

Figura 2: gráfico de $x^3 – x^2 – 4x +4$.

Método da busca dicotômica:

Para $f_1(x)$: $x^* = - 0,9999$

Para $f_2(x)$: $x^* = 1,5395$

Método do segmento áureo:

Para $f_1(x)$: $x^* = - 1,0004$

Para $f_2(x)$: $x^* = 1,5353$

Método de Fibonacci:

Para $f_1(x)$: $x^* = -1,0000$

Para $f_2(x)$: $x^* = 1,5625$

Método de Newton:

Para $f_1(x)$: $x^* = -1,0000$

Para $f_2(x)$: $x^* = 1,5352$

Método do ajuste cúbico:

Para $f_1(x)$: $x^* = -1,0000$

Para $f_2(x)$: $x^* = 1,5352$.

CONCLUSÕES

Todos os métodos que utilizam derivadas (Newton e ajuste cúbico) conseguem chegar no mesmo resultado que se chega ao fazer o cálculo analítico do ponto de mínimo. Entre os métodos que não utilizam derivadas apenas o de Fibonacci alcança tamanha precisão. Os métodos que não utilizam derivadas, além de ter precisão menor comparativamente aos outros, ainda necessitam de mais iterações que os que as utilizam. Portanto, os métodos que utilizam derivadas são mais eficientes.

REFERÊNCIAS

A. V. FIACCO, G. P. MCCORMICK, **Nonlinear Programming - Sequential Unconstrained Minimization Techniques**, Philadelphia: SIAM, 210p,1990.

D. G. LUENBERGER, **Linear and Nonlinear Programming**, 2.ed, Califórnia: Addison-Wesley, 491p,1984.

D. P. BERTSEKAS, **Nonlinear Programming**, 2. ed, Massachusetts: Athena Scientific, 777p, 1999.

D. P. BERTSEKAS, A. NEDIÂC, A. E. OZDAGLAR, **Convex analysis and optimization, Belmont**, Massachusetts: Athena Scientific,534p, 2003.

J. NOCEDAL, S. J. WRIGHT, **Numerical optimization**, New York: Springer, 636p,1999.

M. S. BAZARAA, H. D. SHERALI, C. M. SHETTY, **Nonlinear Programming - Theory and Algorithm,** 2. ed. New York: John Wiley & Sons,
638p,1993.

R. HORST, P. M. PARDALOS, **Handbook of global optimization**, Dordrecht, Boston : Kluwer Academic Publishers, 880p, Nonconvex optimization and its applications séries: v. 2.,1995.