RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DO CAMINHO MÍNIMO VIA TEORIA DOS GRAFOS E ALGORÍTMO DE DIJKSTRA

MATSUMOTO, Igor H. M. [1]; MINAMI, Lívia[2]

[1] Graduando em Licenciatura em Matemática, PIVICT, IFSP, Campus Birigui, matsumoto.igor8@gmail.com
[2] Professora EBTT, Matemática, IFSP, Campus Birigui, liviaminami@ifsp.edu.br
Área de conhecimento (Tabela CNPq): 3.08.02.04-0 Grafos

Apresentado no
10° Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP
27 e 28 de novembro de 2019- Sorocaba-SP, Brasil

RESUMO: A Teoria de Grafos surgiu em 1736, quando Leonhard Euler utilizou-a para resolver o Problema das "Pontes de Königsberg". Königsberg, atualmente conhecida como Kaliningrado, é uma cidade cortada pelo Rio Prególia, dividindo-a em duas ilhas. Na época existiam sete pontes e o problema consistia em descobrir se seria possível realizar um passeio, atravessando todas as pontes uma única vez. Euler identificou cada ponte com uma aresta e cada ilha e margem com um vértice, criando assim o primeiro grafo. Com esta abordagem, foi capaz de provar que era impossível realizar tal passeio e deu origem à Teoria de Grafos. A partir de então, diversos problemas puderam ser resolvidos, ao serem formulados através de grafos. Um deles é o Problema do Caminho Mínimo, que consiste em determinar qual o menor caminho, ligando dois vértices de um grafo. Este trabalho teve como objetivo estudar os conceitos principais de Teoria de Grafos, estudar o Problema dos Caminhos Mínimos, sua resolução e aplicação em exemplos. Em seguida, criou-se um programa que soluciona este problema, baseando-se no Algoritmo de Dijkstra.

PALAVRAS-CHAVE: Teoria de Grafos; Algoritmo; Dijkstra;

PROBLEM OF SHORTEST PATH RESOLUTION WITH GRAPH THEORY AND DIJKSTRA’S ALGORITHM

ABSTRACT: The study of graphs began in 1736 when Leonhard Euler used it to solve the “bridges of Konigsberg” problem. Konigsberg, currently named Kaliningrad, lies on either side of the Pregel river. At the time there were seven bridges and the problem was to find out whether or not it would be possible to perform a tour crossing all of the bridges only once. Euler identified each bridge as an edge and each landmass as a vertex, creating then the first graph. With such an approach, he was able to prove that it is impossible to perform the tour and, thus, introduced the Graph Theory. Since then, many problems could be solved by using graphs. One of them is the Shortest Path Problem, which consists of determining which is the shortest path by connecting two vertices of a graph. This research aims to study the main concepts of the Graph Theory, the Shortest Path Problem, its solution and applications. Then we developed a computer program that solves the aforementioned problem using the Dijkstra Algorithm.

KEYWORDS: Graph Theory; Algorithm; Dijkstra

INTRODUÇÃO

Um grafo G é um par (V,A), onde V é um conjunto de pontos chamados vértices e A um conjunto de segmentos que ligam dois dos elementos de V, denominados arestas(DIESTEL, 2010). O Problema do Caminho Mínimo é um problema bastante estudado e que pode ser aplicado em diversas áreas, tais como Tráfego Urbano, Pesquisa Operacional, Sistemas Rodoviários, dentre outros (MÉNDEZ,2008) e (ATZINGEN, Jorge von et al, 2012), os exemplos citados não são cópias na íntegra, porém podem serem utilizados. Dado um grafo valorado G(V,A), ou seja, um grafo cujas arestas possuem pesos, o problema consiste em determinar o caminho de menor custo, saindo de um vértice A e chegando ao vértice B. O custo de um caminho P é dado pela soma dos valores obtidos em cada aresta percorrida.

Uma aplicação para este tipo de problema é a situação em que queremos sair de uma cidade A e chegar a uma cidade B. De posse de um mapa, o problema consiste em determinar qual caminho é o mais curto. Neste caso, o valor de cada aresta seria dada pela distância de um ponto a outro do trajeto.

Dependendo do tamanho do grafo, a resolução deste problema pode se tornar bastante difícil de se fazer a mão e, portanto, trabalhosa. Para nos auxiliar nesta tarefa, utilizamos o Algoritmo de Dijkstra (MÉNDEZ, 2008) e (CARVALHO, 2008), que é um algoritmo resolutivo, capaz de encontrar a rota mais curta em um grafo com arestas de peso não negativo. O algoritmo de Dijkstra funciona da seguinte forma: se o ponto inicial é o vértice A, ele adiciona tal vértice ao conjunto solução S. Em seguida avalia, dentre os vértices ligados a A, qual agregaria um menor peso. Este vértice é também adicionado ao conjunto S. O próximo passo seria procurar, entre os vértices adjacentes ao último adicionado, qual possui menor peso e adicioná-lo a. E assim, sucessivamente. Para maiores detalhes (CARVALHO,2008).

Neste trabalho foi realizado um estudo da Teoria de Grafos e sua utilização na resolução de Problemas de Caminho Mínimo. Criou-se ainda um algoritmo, baseado no algoritmo de Dijkstra, capaz de resolver tais problemas, sendo este implementado na linguagem de programação C.

MATERIAL E MÉTODOS

Pesquisa qualitativa desenvolvida em campo teórico a partir de livros e artigos já publicados tanto impressos, quanto virtuais. Para o desenvolvimento do algoritmo foi-se utilizado programação orientada a objeto e a lógica baseada no trabalho de Dijkstra.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Durante a pesquisa foi possível perceber o grande potencial que o estudo de grafos proporciona, pois possibilita a interpretação e resolução de situações concretas de diversas naturezas, cuja resolução não pode ser obtida de forma trivial. O estudo do algoritmo de Dijkstra nos mostra de uma forma bem interessante este potencial do estudo, que com vértices e arestas é possível encontrar o menor caminho de um grafo e assim, correlacionar com situações reais. Imagine um mapa em que podemos nos deslocar por diversos caminhos e então pensar, de que forma posso chegar ao meu destino com o menor custo possível? Para pequenas distâncias pode ser fácil dizer rapidamente qual é o menor caminho, mas e se for um percurso entre dois estados distantes? Esta situação pode ser modelada por um grafo, interpretada como um Problema de Caminho Mínimo e resolvida por meio do algoritmo de Dijkstra.

O algoritmo desenvolvido pede num primeiro momento a quantidade de vértices que haverá no grafo pois o programa funcionará para qualquer quantidade de vértices que exista num grafo. Após isso é necessário dizer quais vértices têm ligação com outros vértices, sendo que o número 1 significa que existe a ligação e 0 não existe a ligação, portanto ao colocarmos no formato de matriz, temos uma matriz simétrica como na imagem abaixo.

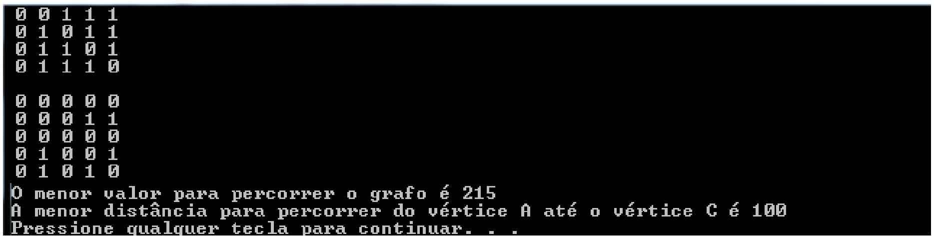
```
 0 1 1 1 1
 1 0 1 1 1
 1 1 0 1 1
 1 1 1 0 1
 1 1 1 1 0
A ligação do vértice A com B, possui qual distância(ou peso)?
```

Feito isso, o próximo passo é descobrir quais são os pesos contidos em cada ligação e é através dessas ligações que vamos descobrir o menor caminho do grafo.

```
A ligação do vértice B com E, possui qual distância(ou peso)?
140
A ligação do vértice C com D, possui qual distância(ou peso)?
45
A ligação do vértice C com E, possui qual distância(ou peso)?
30
A ligação do vértice D com E, possui qual distância(ou peso)?
10

 0 500 100 200 560
 500 0 60 75 140
 100 60 0 45 30
 200 75 45 0 10
 560 140 30 10 0
```

Uma vez que já passamos pelo processo de aquisição das informações necessárias, só resta o processamento do algoritmo que foi baseado no algoritmo de Dijkstra. O algoritmo é dividido em fases, então num primeiro momento escolhe-se o vértice de saída e pegamos todos os vértices que tem ligação com o de saída e guardamos os valores das ligações. A seguir, escolhe-se o vértice com o menor peso, armazenamos este valor e este mesmo vértice passa a ser o novo vértice de saída e feito isso anula-se as ligações do vértice anteriormente escolhido. Já com o novo vértice de saída, soma-se o valor guardado às ligações do novo vértice, escolhe o que tem o menor valor e repete-se tudo novamente.



Então, sabendo de qual vértice se parte e qual vértice se chega, podemos dizer qual é a distância mínima entre estes e qual é a distância mínima para percorrer todo o grafo, tudo isso com o que o algoritmo de Dijkstra propõe.

CONCLUSÕES

Após o estudo da Teoria de Grafos e com o conhecimento em programação, foi possível criar um programa, baseado no algoritmo de Dijkstra, que possibilita resolver o problema do menor caminho.

Este estudo é de extrema importância, uma vez que a quantidade de situações nas quais pode ser aplicado, é imensa. Esperamos que outras pessoas possam fazer uso do programa e que ele possa auxiliá-los na resolução de problemas de Caminho Mínimo.

REFERÊNCIAS

ALBERT, M. Edsger Dijkstra - Dutch computer scientist. Disponível em: https://www.britannica.com/biography/Edsger-Dijkstra. Acesso em 24 mar. 2019.

ATZINGEN, J. V. et al, Análise comparativa de algoritmos eficientes para o problema de caminho mínimo. São Paulo, 2012.

CARDOSO, D. M. Teoria dos grafos e aplicações. Aveiro, 2005.

CARVALHO, B. M. P. S. de. Algoritmo de Dijkstra. Coimbra, 2008.

CHEN,Y. C. et al. Path optimization study for vehicles evacuation based on Dijkstra algorithm. Beijing: Elsevier, 2014.

COSTA, P. P. da. Teoria de grafos e suas aplicações. Rio Claro, 2011.

DAVIS JUNIOR, C. A. Aumentando a eficiência da solução de problemas de caminho mínimo em SIG. Belo Horizonte, 1997.

DIESTEL, R. Graph theory: 4. ed. Graduate texts in mathematics. Hamburg: Springer, 2010.

HERNANDES, F.; BERTON, L; CASTANHO, M. J. P. O problema de caminho mínimo com incertezas e restrições de tempo. Rio de Janeiro: Scielo, 2009.

JURKIEWICZ, S. Grafos - Uma introdução. Rio de Janeiro, 2009.

PRESTES, E. Introdução à teoria dos grafos. Rio grande do Sul, 2016.

MENDEZ, Y. S.; GUARDIA, L. E. T. Problema do caminho mais curto-algoritmo de Dijkstra. São Domingos: Spolm, 2008.

SCHEINERMAN, E. R. Matemática Discreta: 2. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

SILVA, L. C.S. da; SILVA, E. C. S. da; PALHARES, P. E. L. Otimização de rotas: uma aplicação do problema de caminho mais curto em uma loja de eletrodomésticos. Goiás: Veredas, 2016.