INTRODUÇÃO AO PROBLEMA DE EMPACOTAMENTO BIDIMENSIONAL E APLICAÇÕES

JOÃO PEDRO DE SÁ MOREIRA [1], GLAUBER RENATO COLNAGO [2]

[1] Graduando em Engenharia de Controle e Automação, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus Cubatão, jopmoreira20@gmail.com.
[2] Professor Doutor do IFSP, Câmpus Cubatão, glauber.colnago@ifsp.edu.br.
Área de conhecimento (Tabela CNPq): 3.08.02.02-4 Programação Linear, Não-Linear, Mista e Dinâmica.

Apresentado no
8° Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP
06 a 09 de novembro de 2017 - Cubatão-SP, Brasil

RESUMO: Este trabalho tem como objetivos, (i) apresentar as principais características do problema de empacotamento bidimensional, que consiste basicamente na alocação de diversos tipos de itens, com dimensões específicas, em recipientes finitos satisfazendo uma série de restrições, e (ii) apresentar aplicações práticas deste tipo de problema envolvendo a alocação de círculos em uma região retangular com diferentes objetivos e restrições. Os problemas de empacotamento de itens são presentes principalmente em companhias e indústrias, onde busca-se otimizar processos para que os objetivos sejam obtidos da melhor forma possível, garantindo, por exemplo, o máximo lucro ou o mínimo desperdício. A formulação matemática deve atender a condições específicas do processo que está sendo modelado. Neste trabalho discutem-se os resultados obtidos para diferentes funções objetivo e conjunto de restrições. Para a resolução dos problemas, foi utilizado o software livre OpenSolver.

PALAVRAS-CHAVE: formulação matemática; modelagem matemática; otimização; pesquisa operacional; problema de empacotamento.

INTRODUCTION TO THE TWO-DIMENSTIONAL BIN PACKING PROBLEM AND ITS APPLICATIONS

ABSTRACT: This paper has two main goals: (i) presenting the main characteristics featured in the two dimensional bin packing problem, which basically consists in the allocation of various types of items with specific dimensions in a finite number of bins, satisfying a series of constraints, and (ii) presenting real practical applications of these kind of problems involving the allocation of circles in a rectangular region. The item bin packing problems are mainly present in companies and industries, where the optimization of processes can, for example, generate the profit maximization or the minimization of waste. The mathematical formulation must consider the specific condition of each problem. In this work, it is discussed the results of different objectives and constraints. To solve the problems discussed in this work, it was used the software OpenSolver.

KEYWORDS: mathematical modeling; optimization; operational research; binpacking problem.

INTRODUÇÃO

A Pesquisa Operacional, ou Otimização, é a área da Matemática que contempla métodos para a solução de problemas que possuem objetivos que devem atender a restrições. O problema de empacotamento, um tipo particular dentro da Pesquisa Operacional, pode ser definido como a necessidade da alocação de objetos menores dentro de objetos maiores respeitando restrições específicas de cada problema. Pode ser classificado como unidimensional, bidimensional ou tridimensional. Este trabalho aborda problemas bidimensionais, alocando círculos em áreas retangulares.

LODI & MARTELLO & VIGO (2004) definem o problema bidimensional como a necessidade de alocação de itens que possuem uma largura w_i e uma altura h_i $(i = 1,2, \dots, n)$ em recipientes que possuem largura e altura W e H, respectivamente, com o objetivo de alocar todos os itens no mínimo de recipientes possível. Assume-se que a princípio os itens não podem ser rotacionados em 90º, embora isso possa ser uma variante para este problema, como proposto pelo mesmo artigo.

Este tipo de problema é de suma importância em áreas da Indústria e Engenharia, entre outras, que envolvem a alocação do máximo número de objetos em contêiners ou caixas e o melhor aproveitamento no corte de chapas de metal. Cada problema possui características específicas, mas duas restrições são sempre necessárias a todos eles (BORTOLETE, 2016): 1) dois itens não podem ser sobrepostos, e 2) Todos os itens devem estar inteiramente contidos na região onde eles serão alocados.

Este trabalho faz parte de uma etapa de um Projeto de Iniciação Científica em desenvolvimento pelos autores, que busca fazer aplicações de problemas deste tipo, envolvendo diferentes formas geométricas.

MATERIAL E MÉTODOS

Neste trabalho, foram explorados modelos na literatura e, com base neles, foi proposto um problema que envolve a alocação de círculos em áreas retangulares com diferentes abordagens. O modelo do problema foi formulado de modo a fazer com que o problema seja transcrito para a linguagem matemática e possa ser interpretado pelo *solver* que é um software capaz de interpretar as informações e buscar pela resposta ótima que respeita todas as restrições.

Utilizou-se para a resolução dos problemas o OpenSolver (MASON, 2011), que pode ser baixado no site http://opensolver.org/. O software possui uma interface com o Microsoft Excel, o que permite reconhecer as informações do modelo matemático organizado em uma planilha.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

As aplicações consistem na alocação dos 16 círculos disponíveis e apresentados na Tabela 1 em uma região retangular de dimensões 300×250. As aplicações propostas envolvem quatro diferentes situações, sendo elas, Problema 1: maximização da área preenchida por círculos; Problema 2: maximização da quantidade de círculos alocados; Problema 3: maximização da área preenchida por círculos com restrição de limitação orçamentária; e Problema 4: maximização da quantidade de círculos alocados com a restrição de limitação orçamentária.

Tabela 1 – Dados dos círculos disponíveis para alocação.

Quantidade	3	3	2	2	1	2	2	1
Raio	5	10	20	25	30	40	60	80
Custo	5	13	17	15	20	26	38	45

Independente das condições específicas dos 4 problemas, as restrições de não sobreposição (1) e de encaixe dos itens inteiramente na região de interesse (2) e (3) são comuns a todos. Estas formulações estão apresentadas na sequência:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \geq z_i z_j (r_i + r_j)^2 \quad (1)$$
$$r_i z_i \leq x_i \leq (X - r_i) z_i \quad (2)$$
$$r_i z_i \leq y_i \leq (Y - r_i) z_i \quad (3)$$
$$z_i \in \{0,1\} \quad (4)$$

para $i = 1, \ldots, 16$, em que,
r_i: raio do círculo i;
z_i: variável que indica se i foi alocado ($z_i = 1$) ou não ($z_i = 0$);
x_i: abcissa do centro do círculo i;
y_i: ordenada do centro do círculo i;
X: largura do recipiente retangular, e
Y: altura do recipiente retangular.

No Problema 1 (maximização da área preenchida por círculos), o objetivo é dado por:

$$Max \sum_i \pi r_i^2 z_i \quad (5)$$

O resultado deste problema está apresentado na Figura 1.a.

Para o Problema 2 (maximização da quantidade de círculos utilizados), à formulação (1) - (4) adiciona-se o objetivo dado por (6):

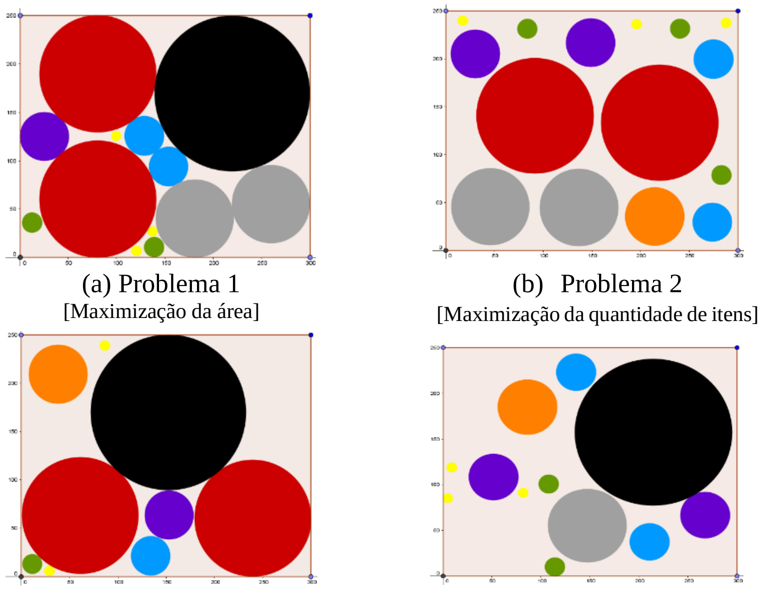
$$Max \sum_i z_i \quad (6)$$

A solução deste problema é dada pela apresentada na Figura 1.b.

Já para os Problemas 3 e 4, os objetivos são os mesmos, dos Problemas 1 e 2, respectivamente, mas deve-se adicionar uma restrição de limitação orçamentária. Considere que o valor total disponível para a compra de itens é de $200 e os custos dos círculos são os apresentados na Tabela 1. Adiciona-se, então, a restrição:

$$\sum_i c_i z_i \leq 200 \quad (7)$$

Assim, o Problema 3 (maximização da área com restrição orçamentária) tem a formulação dada por (1) a (5) e (7), o Problema 4 (maximização da quantidade de itens com restrição orçamentária) é composto por (1) a (4), (6) e (7).



(a) Problema 1 [Maximização da área]

(b) Problema 2 [Maximização da quantidade de itens]

(c) Problema 3 [Maximização da área com restrição orçamentária]

(d) Problema 4 [Maximização da quantidade de itens com restrição orçamentária]

Figura 1 – Representação gráfica das soluções ótimas de cada um dos problemas.

No primeiro problema (Figura 1.a) foram alocados 13 dos 16 itens, em comparação com o segundo problema (Figura 1.b), para o qual foram alocados 15. Observa-se que na Figura 1.a a área preenchida é maior, embora menos itens tenham sido alocados. Na abordagem com restrição orçamentária, tanto no Problema 3 (Figura 1.c, com 9 itens) como no Problema 4 (Figura 1.d, com 12 itens), dos $200 disponíveis, foram utilizados $196.

CONCLUSÕES

Neste trabalho foram exploradas aplicações práticas do problema de empacotamento e pode-se verificar que a melhor solução possível depende de alguns fatores, que vão desde as características dos itens e da região, função objetivo e restrições. Com isto, simularam-se situações que são encontradas em problemas de empacotamento. Como continuação deste trabalho introdutório, estão sendo modelados problemas envolvendo diferentes figuras, como retângulos e triângulos, com uma abordagem objetivando o uso de aproximações de equações destas figuras.

AGRADECIMENTOS

Agradecemos ao IFSP, Câmpus de Cubatão, e ao programa PIBIFSP.

REFERÊNCIAS

BORTOLETE, J. C. Empacotamento de círculos usando Otimização não Linear. Dissertação de Mestrado. Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas, SP. 2016.

LODI, A; MARTELLO, S; VIGO, D. Models and Bounds for Two-Dimensional Level Packing Problems. Journal of Combinatorial Optimization, v.8, p.363-379, 2004.

MASON, A. J. OpenSolver – An Open Source Add-in to Solve Linear and Integer Progammes in Excel. In: KLATTE, D.; LUTHI, H. J.; SCHMEDDERS, K. Operations Research Proceedings. Berlin: Springer, 2011. p. 401-406.