

SIMULAÇÕES ESTOCÁSTICAS EM GEOMETRIA VIA O MÉTODO DE MONTE CARLO

ARTHUR PIRES JULIÃO¹, LUIZ FERNANDO SENA², PATRICIA ANDREA PALADINO³

¹ Prof. Mestre, FATEC-SP, pjarthur@fatecsp.br.

² Graduando em Matemática, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Campus São Paulo, luizsena@professor.educacao.sp.gov.br.

³ Profa. Doutora, IFSP, Campus São Paulo, patricia.paladino@yahoo.com.

Área de conhecimento (Tabela CNPq): 1.01.04.02-0 Análise Numérica

Apresentado no
8º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP
06 a 09 de novembro de 2017 - Cubatão-SP, Brasil

RESUMO: nesta pesquisa investiga-se conteúdos geométricos associados a curvas planas e bolas euclidianas fechadas n -dimensionais via o Método de Monte Carlo, método numérico que busca resolver, por meio de simulações com variáveis aleatórias, certos problemas matemáticos. As simulações foram realizadas com a construção de algoritmos em linguagem C++ em microcomputadores. Realizou-se a geração dos números pseudoaleatórios para se estimar a área da elipse e os conteúdos das bolas euclidianas fechadas n -dimensionais. Os resultados obtidos atestam a eficácia do Método de Monte Carlo para os objetivos visados, chegando a um resultado curioso, estabelecido, via integrais múltiplas, pelo Cálculo.

PALAVRAS-CHAVE: conteúdo geométrico; gerador de números pseudoaleatórios; bola fechada.

GEOMETRIC STOCHASTIC SIMULATIONS VIA THE MONTE CARLO METHOD

ABSTRACT: this work investigates geometric contents associated to plane curves and closed n -dimensional Euclidean balls via the Monte Carlo Method, a numerical method that aims to solve, by means of simulations with random variables, certain mathematical problems. The simulations were performed using algorithms in the C++ language running in microcomputers. The generation of pseudo-random numbers was used to estimate the area of the ellipse and the hypervolume of closed n -dimensional Euclidean balls. The results obtained confirm the efficiency of the Monte Carlo Method to deal with the desired objectives, leading at a curious result, proved by multiple integrals.

KEYWORDS: geometric content; pseudo-random number generator; closed ball.

INTRODUÇÃO

O Método de Monte Carlo permite com a mesma facilidade com que se consegue calcular uma área de uma superfície plana, calcular conteúdos multidimensionais de um corpo em um espaço multidimensional e, neste caso, é um dos poucos métodos numéricos que resolvem este problema. Este método é estatístico e baseia-se em amostragens aleatórias a fim de se obter resultados numéricos (SOBOL, 1976). Para a repetição de sucessivas simulações é necessário o uso de um gerador de números pseudoaleatórios. Um gerador de números pseudoaleatórios é um algoritmo que gera uma sequência de números do intervalo $[0, 1[$, os quais são aproximadamente independentes um dos outros.

Inicialmente utilizou-se o método para estimar a área da elipse e posteriormente o conteúdo geométrico da bola euclidiana fechada de centro P e raio 1. A bola fechada é o conjunto dos pontos $x \in \mathbb{R}^n$, que na métrica euclidiana distam do centro P um valor menor ou igual a 1. Observou-se que,

conforme aumenta-se a dimensão de 1 até 3, o conteúdo geométrico aumenta. Quando aumenta-se a dimensão sucessivamente, o conteúdo geométrico também aumentará? LIMA (2013) observa o mesmo problema, e mostra um meio para se calcular o multivolume de uma bola euclidiana de raio r :

$$V = V_n(r) = r^n \pi^{\frac{n}{2}} / \left(\frac{n}{2}\right)!, \text{ quando } n \text{ é par, e} \quad (1)$$

$$V = V_n(r) = r^n \pi^{(n-1)/2} \cdot \frac{2^n \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{n!}, \text{ caso } n \text{ seja ímpar} \quad (2)$$

em que,

V_n – conteúdo geométrico (multivolume);

r – raio em $\mathbb{R}^n$, e

n – dimensão ($n \in N, n \geq 1$).

MATERIAL E MÉTODOS

As simulações foram realizadas com algoritmos implementados na linguagem C++. Foram criados dois códigos: um para o cálculo da área da elipse centrada na origem e com eixos contidos nos eixos coordenados e outro para o cálculo do conteúdo geométrico da bola euclidiana n -dimensional.

Para a área da elipse, o algoritmo recebe do usuário as medidas dos semieixos, a quantidade de pontos a serem sorteados e a semente, número que será usado para iniciar e controlar o gerador. É então criado um vetor bidimensional que determina duas posições com números pseudoaleatórios. Os valores são posicionados dentro de uma estrutura de repetição, sendo o primeiro para x , dentro do intervalo $[-a, a[$ e o segundo para y , no intervalo $[-b, b[$. Se o ponto estiver na elipse ou no interior da região plana limitada por ela delimitada, há um incremento de uma unidade em uma variável C , inicialmente igual a 0. Após fazer esse procedimento para todos os pontos, obtém-se a aproximação para a área da elipse, apresentada na Equação 3; a mesma área pode ser obtida por integração conforme a Equação 4.

$$A \approx \frac{C}{N} \cdot 4 \cdot a \cdot b \quad (3)$$

$$A = \pi \cdot a \cdot b \quad (4)$$

em que,

A - área da elipse;

C - quantidade de pontos na elipse ou em seu interior;

N - quantidade de pontos sorteados;

a - medida do semieixo em x

b - medida do semieixo em y .

As escolhas: $a = 2$ e $b = 1/2$, descrevem uma elipse inscrita no retângulo $[-2, 2] \times [-1/2, 1/2]$, com $A = \pi$. A Figura 1 ilustra a elipse estudada e alguns “pontos aleatórios” sorteados.

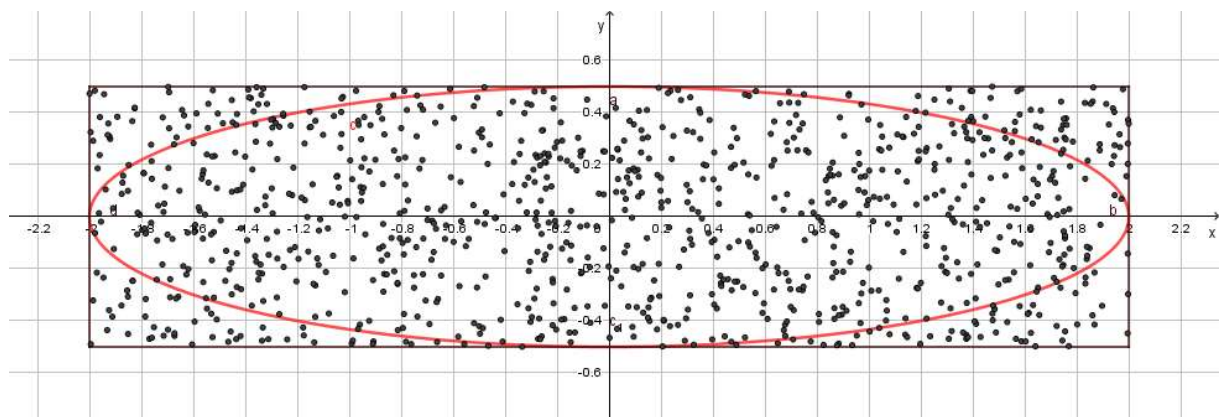


FIGURA 1. Elipse inscrita num retângulo com mil pontos sorteados aleatoriamente.

Para o conteúdo da bola euclidiana fechada n -dimensional de raio 1 e centro na origem, o algoritmo recebe do usuário a dimensão, a quantidade de pontos e a semente, cria um vetor n -dimensional e aloca os valores gerados numa estrutura de repetição, verifica se o ponto sorteado pertence à bola fechada e, caso isso ocorra, incrementa uma unidade em uma variável C , inicialmente igual a 0.

Feito isso para todos os pontos, o programa retorna com a aproximação, calculada via o método de Monte Carlo, do conteúdo geométrico da bola, dada pela Equação 4:

$$V \approx \frac{C}{N} \cdot 2^n \quad (5)$$

em que,

V - conteúdo geométrico da bola fechada n-dimensional;

C - quantidade de pontos na elipse ou em seu interior;

N - quantidade de pontos sorteados, e

n - dimensão.

Note que 2^n é o conteúdo do bloco n-dimensional no qual a bola está inscrita. A Figura 2 ilustra o caso para $n=3$

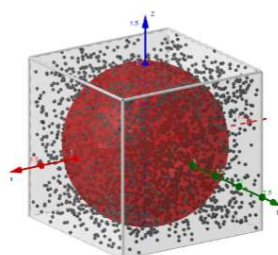


FIGURA 2. Bola fechada euclidiana inscrita num cubo com três mil pontos sorteados aleatoriamente.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados obtidos são apresentados nas Tabelas 1 e 2 e mostram a eficácia e o potencial do método de Monte Carlo. Uma das questões levantadas sobre a bola fechada euclidiana foi: quando se aumenta a dimensão, seu conteúdo aumenta também? Os resultados obtidos são muito interessantes:

Tabela 1: Área da elipse

Pontos sorteados	Área obtida (Aprox. π)	Erro relativo
10^0	4,000000000000000	0,273240
10^1	4,000000000000000	0,273240
10^2	3,200000000000000	0,018592
10^3	3,155999999999999	0,004586
10^4	3,126399999999999	0,004836
10^5	3,136959999999999	0,001475
10^6	3,141808000000000	0,000069
10^7	3,140944400000000	0,000206
10^8	3,141523920000000	0,000022

Tabela 2: Conteúdo da bola n-dim. $B_1[0]$
(Com o sorteio de 100 milhões de pontos)

Dimensão	Conteúdo Obtido	Erro Relativo
1	2,000000000000000	0
2	3,141626880000000	0,00001089
3	4,188961360000000	0,00004086
4	4,935545440000000	0,00015061
5	5,266041279999999	0,00042788
6	5,172344960000000	0,00089637
7	4,728753919999999	0,00084405
10	2,547804160000000	0,00009254
15	0,405012480000000	0,06178953
20	0,010485760000000	0,59368372
30	0,000000000000000	1

CONCLUSÕES

Aparentemente, quando se aumenta a dimensão, o valor do conteúdo geométrico da bola euclidiana também aumentará, o que de fato ocorre até a dimensão 5, a partir daí o conteúdo começa a tender para zero, rapidamente. LIMA (2013) observa isso como uma curiosidade e, informa os valores exatos, algo numérica e aproximadamente constatado nesse trabalho, via o Método de Monte Carlo.

AGRADECIMENTOS

Este trabalho foi financiado pelo Programa de Iniciação Científica do IFSP (PIC/IFSP).

REFERÊNCIAS

- LIMA, E. L. Curso de Análise, v.2, n.6, São Paulo: IMPA. 546p. 2013.
SOBOL, I. M. Método de Montecarlo, Moscou: Mir. 78p. 1976.