Título: O desenvolvimento da concepção das estruturas axiomáticas por meio dos axiomas de Peano

Dérick Alves de Jesus[1], Rafael Nogueira Luz[2]

[1]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – Câmpus Caraguatatuba. Graduando em Licenciatura em Matemática. derickalves55@gmail.com
[2]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia – Câmpus Caraguatatuba. Professor da Licenciatura em Matemática. rafaelnogueira@ifsp.edu.br

Resumo: Este artigo apresenta os resultados de uma experiência realizada no âmbito do IFSP Câmpus Caraguatatuba sobre o uso dos axiomas de Peano para a compreensão da estrutura de teorias axiomáticas. Para tanto foi desenvolvido um material contendo a axiomática de Peano, suas principais proposições e respectivas demonstrações. Os resultados aqui apresentados foram obtidos por meio de questionários com perguntas - abertas e fechadas - a respeito do tema e das dificuldades encontradas. Deste modo, percebeu-se um avanço significativo nos conceitos trabalhados, em especial na compreensão das características necessárias a um conjunto de axiomas, as características das definições, a distinção entre um axioma e uma proposição e o método de demonstrar por indução. Os participantes eram licenciandos em Matemática ou em Física, com uma faixa etária muito estreita e sem conhecimento prévio sobre os axiomas de Peano. Os resultados parciais deste trabalho foram apresentados em congresso acadêmico. Com revisão bibliográfica foi possível perceber uma escassez em pesquisas utilizando a axiomática dos naturais para a compreensão de conceitos matemáticos para licenciandos. Deste modo esperamos que os resultados aqui apresentados fomentem mais estudos a respeito do uso desta estrutura no ensino da estruturação formal da matemática.

Palavras–chave: Axiomas de Peano; axiomática; educação matemática; formalização

Linha Temática: Ensino e Aprendizagem.

1 INTRODUÇÃO

Quanto às estruturas axiomáticas, é preciso saber que o conjunto de axiomas utilizado como pilar da estrutura desenvolvida deve, de acordo com Ripoll; Rangel; Giraldo (2015), possuir três características básicas: ser *mínimo*, para que não sejam incluídas proposições desnecessárias; ser *suficiente*, ou seja, que toda a teoria possa ser deduzida a partir deles e ser *consistente*, para não conduzir a contradições.

É importante especificar que em uma axiomática *formal* “[...] as deduções são cadeias de transformação simbólicas seguindo regras explícitas de manipulação de símbolos.” (SILVA, 2007, p.184). Ou seja, ao tornar uma axiomática formal (ou simplesmente formalizar), evita-se uma significação particular dos entes estudados. O processo de formalização é essencial para estruturar a matemática de modo a impedir que a intuição nos leve a resultados ambíguos.

Pode-se dizer que o conjunto dos números naturais (IN) é o conjunto numérico mais básico que existe e, de acordo com Ferreira (2011), podemos construir os inteiros não positivos com base na estrutura aritmética que temos em IN. Dado isso, pode-se construir formalmente, com os inteiros, o conjunto dos números racionais e deste formalizar o conjunto dos reais. Com isso, vê-se que “[...] o grosso da matemática pode ser reduzido de um conjunto de postulados para o sistema dos números naturais” (EVES, 2004, p. 611). Dos axiomas de Peano pode-se sublinhar a importância do (em geral deixado por) último, também conhecido como princípio da indução finita, que é fundamental para demonstrações de propriedades que sejam válidas nos naturais. Para utilizar a indução finita deve-se provar que uma propriedade é verdadeira em um caso particular, supor que a propriedade ocorre para um caso igual ou maior que o verificado e analisar se para o seu sucessor a propriedade é verdadeira.

Os trabalhos de Silva e Savioli (2008, 2012), mostram que com a realização da discussão sobre os axiomas de Peano, alguns graduandos partiram de um nível de empirismo ingênuo, definido nos artigos como a análise de casos particulares com o intuito de provar o caso geral, para a compreensão do exemplo genérico, ou seja, provar a verdade de uma proposição com a manipulação de alguns exemplos de modo a possibilitar a dedução de propriedades de uma classe de objetos. Desta forma, é visível a necessidade de uma abordagem cuidadosa a respeito das demonstrações por indução para que futuros professores da educação básica compreendam seu significado e não apenas seus resultados.

Mas pensando na teoria axiomática de Peano, observou-se que para apresentar suas principais deduções é necessário trabalhar diversos conceitos utilizados na matemática. Deste modo, neste trabalho buscamos identificar as mudanças na compreensão conceitual do que seriam estruturas axiomáticas, suas definições, conceitos primitivos e demonstrações (no caso, em especial a indução finita) após a apresentação da axiomática utilizada na formalização dos naturais e desenvolvida por Peano.

2 CONSIDERAÇÕES HISTÓRICAS

Em geral, é atribuído o desenvolvimento do raciocínio postulacional dedutivo aos antigos gregos, entre 600 a.C e 400 a.C. Estes desenvolveram uma axiomática para esta sistematização de sua matemática. Nesse sistema, a veracidade das proposições é verificada por meio da *demonstração*. De acordo Courant e Robbins (2000), “demonstrar” em um sistema dedutivo seria mostrar de que uma proposição é consequência lógica de proposições já provadas, sendo estas também devidamente demonstradas. Assim, para que esta regressão pare, é necessário que existam afirmações aceitas sem demonstração, estas sendo chamadas de postulados.

A estrutura criada pelos antigos gregos não sofreu grandes mudanças até o século XVIII, onde (em especial em especial por conta do desenvolvimento das geometrias não euclidianas) foi necessário tornar mais claros os fundamentos da Matemática. Em consequência ocorreu um processo para tornar a matemática mais precisa e logicamente mais consistente. Assim diversas teorias matemáticas foram formalizadas com o uso da lógica simbólica e de conceitos primitivos.

A formalização axiomática dos naturais feita por Giuseppe Peano (1858-1932) em 1889 na obra intitulada *“Arithmetica principia nova methodo exposita”* se destaca por sua simplicidade. A proposta de formalização de Peano tem uma excepcional importância histórica e utiliza o chamado *princípio da indução finita* como axioma, este sendo “[...] implícito em todos os argumentos onde se diz ‘e assim por diante’” (LIMA, 2016, p. 35). Desta forma, utilizá-la pode trazer, além de um primeiro contato com uma estrutura axiomática, uma visão diferente das definições e demonstrações por indução.

3 MATERIAL E MÉTODOS

Para formalizar a construção axiomática dos números naturais é comum empregar de três a cinco axiomas. Neste trabalho optou-se por utilizar três axiomas. Outra preferência foi a inclusão do número zero como sendo um elemento do conjunto dos números naturais. Neste caso devemos destacar, como explanado por Ripoll; Rangel e Giraldo (2015), que o zero pertencer ou não aos naturais é apenas uma questão de preferência, pois este pode ser formalmente determinado de forma consistente em versões com ou sem o zero. Como o trabalho em questão se propõe a auxiliar na compreensão de conceitos utilizados em álgebra e de teoria dos números, utilizar o número zero é interessante pelo fato dele ser o elemento neutro da operação de adição.

Segundo Lima (2016), tão relevante quanto demonstrar por indução é definir indutivamente. Assim torna-se essencial dar uma ênfase maior nas definições construídas desta forma. A respeito disso, definições como as das operações de adição e multiplicação foram trabalhadas de modo a enfatizar o processo indutivo presente nas mesmas.

Para o desenvolvimento do trabalho, foram realizados nove encontros, com duração de 1 hora e 40 minutos cada, entre os meses de agosto a outubro de 2017, e divididos em quatro partes com questionários ao final de cada parte. O material de apoio desenvolvido foi diretamente utilizado em sala para direcionar o teor de cada encontro e disponibilizado ao final dos encontros.

Os questionários foram realizados utilizando a ferramenta de estruturação de formulários do Google e aplicados ao final de cada uma das quatro partes, sendo que o primeiro usado como uma ferramenta diagnóstica, o segundo foi direcionado às dificuldades apresentadas, o terceiro nas características das estruturas axiomáticas e o processo formal de *contar,* o quarto verificou as mudanças no conceito de axioma e de indução dos participantes. Nestes constaram perguntas abertas e fechadas utilizadas tanto em análises qualitativas, sobre o conhecimento prévio dos alunos, sobre o que é uma demonstração, as características da matemática como ciência e as diferenças entre indução empírica e matemática, quanto em análises quantitativas com o objetivo de avaliar as dificuldades apresentadas e levantar pautas sobre a metodologia das aulas.

As aulas foram expositivas, utilizando um material feito previamente contendo os axiomas de Peano, 8 definições, 12 teoremas, 1 lema e 6 proposições, assim como suas respectivas demonstrações. É relevante frisar que nas aulas buscamos frisar a "sutil" diferença entre lema, proposição e teorema. Também foi ministrada uma aula contendo aplicações do princípio da indução em diferentes áreas da matemática.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

A proposta do projeto de pesquisa foi apresentada no VI seminário de iniciação científica do litoral norte, com o título *"Os Axiomas de Peano e o Princípio da Indução Finita"*. O presente trabalho apresenta a conclusão da pesquisa e os resultados analisados após a realização dos encontros propostos.

Durante as aulas foi possível evidenciar a necessidade teórica da formalização dos números em diversos campos da matemática, bem como a importância do trabalho de Peano. Com relação à compreensão da demonstração por meio indução finita, foi possível verificar que esta tornou-se menos superficial. Os participantes conseguiram, inclusive, aplicar a indução em situações diversas na matemática como, por exemplo, na geometria, na trigonometria, na álgebra básica e na teoria das matrizes.

Dos dados coletados observamos que os participantes têm entre 18 e 23 anos, todos estudantes de licenciatura, com 54% afirmando ter se inscrito por gostar do tema e 81% afirmando conhecer o que seria um axioma (apesar de grande parte dos inscritos cursarem os primeiros anos dos cursos). Destacamos ainda que todos afirmaram desconhecer os axiomas de Peano. Aplicou-se perguntas nas quais os alunos deveriam refletir sobre os conceitos; damos destaque a uma que utilizava a indução empírica para "provar" que um certo polinômio, sobre os números inteiros, sempre teria como valor numérico um número primo. Neste problema era esperado que os participantes percebessem não só o fato de que a demonstração estava errada, mas também que isso não implica que o teorema está errado (apesar de no caso estar) nessa questão, apenas 27,3% dos participantes notaram que era possível afirmar simplesmente que a demonstração estava errada, porém apenas 9% dos participantes assinalaram que a demonstração está correta.

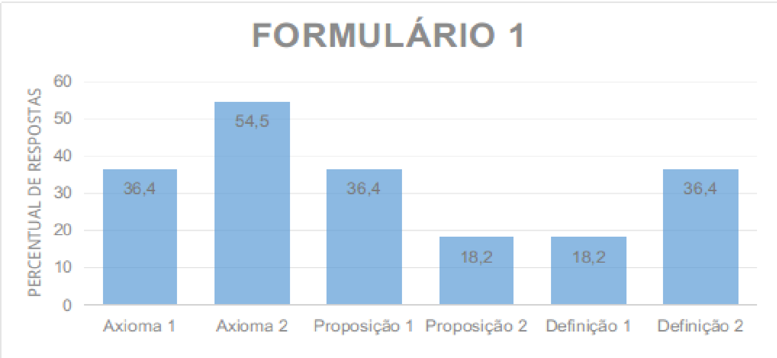
Ou seja, a grande maioria dos participantes conseguiram perceber, mesmo de maneira intuitiva, que não existe uma implicação direta nas afirmações, o que evidencia que existe um conhecimento prévio a respeito do tema. Este possibilitou, mesmo que de forma limitada, uma distinção entre a indução empírica e a indução matemática, o que é relevante, pois como explanado por Silva e Savioli (2008, 2012), significa que eles não estão mais no estágio de empirismo ingênuo. Além disso, dos participantes que responderam ao último questionário, nenhum confundiu a indução empírica com a indução matemática, mas continuaram as dificuldades em compreender que uma demonstração errônea não nega a veracidade da afirmação.

Uma dificuldade apresentada foi relacionada a utilização de conjuntos nas demonstrações, estes usados nas demonstrações por indução por conta do terceiro axioma. Alguns conjuntos, segundo participantes, não pareciam ter sua existência justificada. Relacionou-se estas dificuldades com a inexperiência dos participantes com estruturas axiomáticas e com a utilização do conjunto vazio para assegurar a existência dos conjuntos definidos nas demonstrações.

De acordo com o formulário 3, a respeito das três características necessárias em uma estrutura axiomática, todos os participantes conseguiram identificar a consistência e a suficiência. Porém, quanto a serem mínimos, foi confundido com a característica de veracidade.

Um dado importante é que foi pedido nos formulários inicial e final, que os participantes escolhessem, dentre 6 opções, sendo duas definições, duas proposições e dois axiomas, quais poderiam ser axiomas. Os resultados estão expostos nos gráficos abaixo.

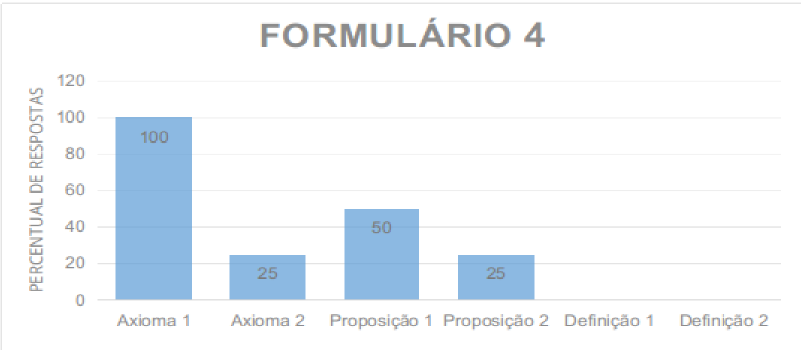
Figura 1: Dados do formulário 1.



Fonte: Autor

Nas respostas do formulário 1 é possível notar que dificuldade de distinguir axiomas de proposições ou de definições era a mesma. Em especial a dificuldade em visualizar as características de uma definição (em que não há uma afirmação que poderia ser classificada como verdadeira ou falsa, diferentemente de uma proposição ou axioma), evidencia pouca experiência com estruturas axiomáticas.

Figura 2: Dados do formulário 4



Fonte: Autor

É importante notar que apesar de ainda haver dificuldade em distinguir proposições de axiomas, depois do curso nenhum participante assinalou alguma das definições apresentadas. Apesar dos avanços na distinção entre axioma e definição, a distinção entre uma proposição e um axioma continua desafiadora.

Da análise dos resultados é relevante apontar que houveram alunos que descreveram, no primeiro formulário, axioma como sendo um “conceito ao qual não se há dúvidas de sua veracidade” e no último foi descrito como “pilar básico da estrutura”. Esta mudança, apesar de aparentemente pequena, indica que a noção de axioma não está mais presa na intuição, mas em sua necessidade para a estrutura lógica.

5 CONCLUSÕES

Com a aplicação das aulas e análise dos formulários a respeito do tema foi identificado nos participantes o amadurecimento na compreensão do papel das definições na teoria matemática, bem como nos conceitos de axioma e de “teoria formal”. Além disso, com a análise dos dados coletados nos formulários ficou evidente que a distinção entre a indução empírica e a indução matemática ficou mais clara para os participantes. Também verificou-se avanços significativos nos procedimentos e técnicas de demonstração.

Durante a pesquisa sobre materiais a respeito do uso dos axiomas de Peano de maneira detalhada para o ensino superior, notou-se que a maioria dos trabalhos busca elaborar propostas para a introdução do tema na educação básica. Assim sendo, esperamos que os resultados positivos encontrados na conceitualização dos temas para futuros professores fomentem mais trabalhos voltados à este público, bem como para os professores da área.

REFERÊNCIAS

COURANT, Richard, ROBBINS, Herbert. **O que é Matemática?**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2000.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática.** 4ª reimpressão. Campinas: Unicamp, 2004. Tradução de Hygino H. Domingues.

FERREIRA, Jamil. **A Construção dos Números.** 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. 133 p.

LIMA, E. L. **Curso de análise volume 1**. 14. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2016.

RIPOLL, Cydara; RANGEL, Leticia; GIRALDO, Victor. **Livro do professor de matemática volume 1:** Números Naturais. Rio de Janeiro: SBM, 2015. 1 v; 210 p. (Coleção de Matemática para o Ensino).

SAVIOLI, Angela Marta Pereira das Dores. **Uma Reflexão sobre a Indução Finita: relato de uma experiência**. *Bolema: Mathematics Education Bulletin, Bolema: Boletim de Educação Matemática* 20.27 (2008).

SILVA, E. M. SAVIOLI, A. M. P. D. **O Conceito de Indução Finita na Compreensão de Estudantes de Um Curso de Matemática**. ALEXANDRIA, v.5, n.3, p.127-148. 2012.

SILVA, Jairo José da. **As filosofias da Matemática**. São Paulo: Editora UNESP, 2007.