

MÓDULO DE *SOFTWARE ON-LINE* PARA ANÁLISE DE VIGAS VIA EULER-BERNOULLI

ALEX SANDRO S. COELHO¹, GUSTAVO C. NIRSCHL²

¹Graduando em Engenharia Civil, Bolsista PIBIFSP, IFSP, Câmpus Votuporanga, alex.sandro.sc05@gmail.com

²Professor MSc. da área de Edificações, IFSP, Câmpus Votuporanga, nirschl@gmail.com

Área de conhecimento (Tabela CNPq): Mecânica das Estruturas - 3.01.02.04-9

RESUMO: Dentre os *softwares* de cálculo da área de Engenharia Civil, a maioria não apresenta todos os passos realizados para se encontrar a solução apresentada. Posto isso, o grupo de pesquisa do qual os autores fazem parte desenvolve programas que descrevem de forma breve a teoria envolvida e apresentam o detalhamento dos cálculos a fim de auxiliar alunos, professores e profissionais da área. O programa aqui apresentado é um novo módulo do programa IFESTRUT, já disponível *on-line*, para análise estrutural de vigas pela Teoria de Euler-Bernoulli.

PALAVRAS-CHAVE: Análise Estrutural; *Software*; Teoria de Euler-Bernoulli.

ONLINE SOFTWARE MODULE FOR BEAM ANALYSIS BY EULER-BERNOULLI

ABSTRACT: Among the calculation software of the Civil Engineering area, most do not present all the steps taken to find the presented solution. Therefore, the research group of which the authors are part develops programs that briefly describe the theory involved and present the details of the calculations in order to assist students, professors and professionals in the area. The program presented here is a new module of the IFESTRUT software, already available online, for structural analysis of beams by Euler-Bernoulli's Theory.

KEYWORDS: Structural analysis; *Software*; Euler-Bernoulli's Theory.

INTRODUÇÃO

Muitos *softwares*, a exemplo do FTOOL (2017) - programa de análise estrutural - são amplamente utilizados tanto por profissionais da área de Engenharia Civil quanto por professores. Entretanto eles apresentam, em sua maioria, apenas os resultados finais daquilo que foram solicitados, ou, quando mostram o método de resolução, não esclarecem todas as partes do processo.

Por causa disso, o Núcleo de Engenharia Virtual e Experimental (NEV - 2015), grupo de pesquisa cadastrado no CNPq, tem se empenhado em desenvolver páginas na internet a fim de realizar cálculos desse âmbito profissional, mas com um diferencial singular - gerar um arquivo em PDF em que todo o passo a passo desses cálculos é explicitado.

Neste artigo, é exposto o desenvolvimento de um módulo de um *software* já existente que trata da análise de estruturas lineares planas (denominado IFESTRUT). Tal módulo visa à análise estrutural de vigas horizontais (isostáticas ou hiperestáticas), valendo-se, para tanto, da teoria de vigas de Euler-Bernoulli (comumente conhecida como Teoria de Vigas Clássica).

MATERIAL E MÉTODOS

Conforme Proença (2003), a teoria de vigas de Euler-Bernoulli desenvolve a análise estrutural de vigas desprezando o cisalhamento da seção transversal e considerando apenas o efeito da flexão. Os resultados fornecidos para a deformação são satisfatórios para vigas longas que, segundo Beer (2011), na prática, tenham a relação altura (h) por comprimento (L) menor que 0,1 ($h/L < 0,1$).

Considerando uma viga submetida à flexão, sendo x a posição, da esquerda para a direita, E o Módulo de Elasticidade do material e I o Momento de Inércia da seção transversal, Beer (2011) e Proença (2003) desenvolvem as equações:

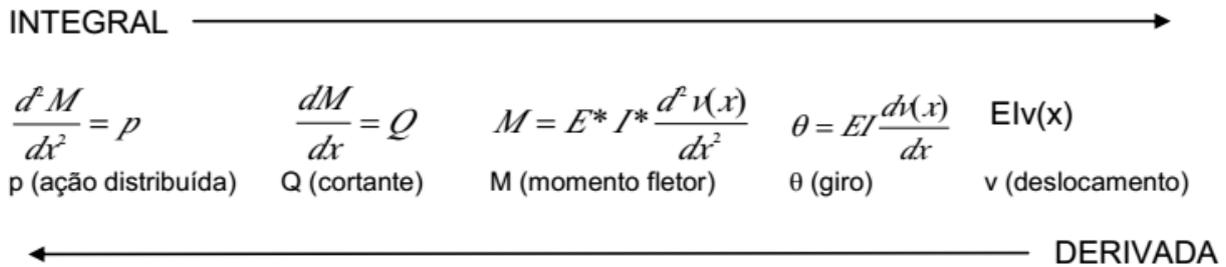


FIGURA 1. Equações desenvolvidas por Beer (2011) e Proença (2003)

Para a resolução, é preciso estabelecer as equações iniciais dos esforços de cada trecho da estrutura, considerando, para tanto, as condições de contorno pertinentes e montando um sistema linear global, como pode ser visualizado no item a seguir (resultados), a fim de obter as constantes de integração que determinarão as equações finais de cada trecho da estrutura.

O módulo de programa foi desenvolvido e implementado em um programa base CAD denominado IFESTRUT, resultado de uma iniciação científica apresentada por SANTOS JUNIOR, L. J.; LOPES, A. J. F.; NIRSCHL, G. C. (2017), já disponível na página de internet do grupo de pesquisa do qual os autores fazem parte. Para o desenvolvimento, foi utilizada a linguagem HTML/Javascript.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Na Figura 2, encontra-se um exemplo de estrutura desenhada no IFESTRUT a ser calculada pela Teoria de Euler-Bernoulli.

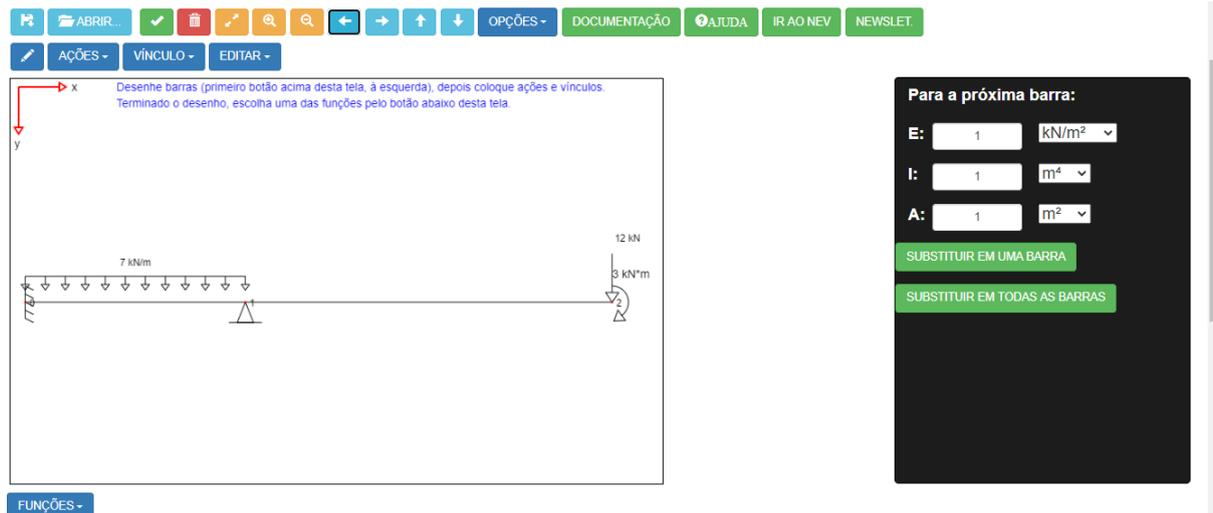
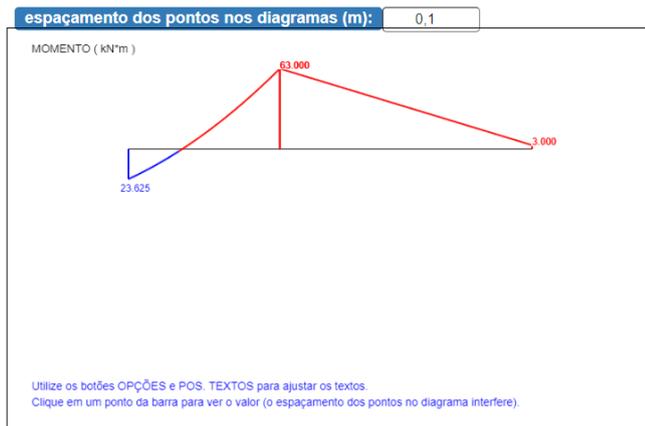


FIGURA 2. Exemplo de uma estrutura desenhada pelo programa, que será calculada pelo método de Euler-Bernoulli. Fonte: O próprio autor.

Ao clicar no botão FUNÇÕES, na figura 2, o usuário pode escolher o módulo de resolução de vigas por Euler Bernoulli aqui apresentado. Os resultados da análise aparecem como no exemplo da figura 3, relacionado aos dados da figura 2. No exemplo, está o diagrama de momentos fletores.



OPÇÕES- POS. TEXTOS-

Deslocamento: y (mm)

Giro: teta (rad)

Momento: M (kN*m)

Cortante: Q (kN)

GERAR RELATÓRIO

FIGURA 3. Diagrama de momentos fletores. Fonte: O próprio autor.

Ao clicar no botão GERAR RELATÓRIO, na figura 3, o usuário tem a oportunidade de visualizar o relatório PDF com todos os passos de cálculo. Na figura 4, mostra-se o relatório para o caso da estrutura das figuras 2 e 3.

Equações-Base da Teoria de Euler-Bernoulli, para cada trecho

Cortante: $Q(x) = -q \cdot x + C1$
Momento: $M(x) = -(q \cdot x^2 / 2) + (C1 \cdot x) + C2$
Giro: $\theta(x) = -(q \cdot x^3 / (6 \cdot EI)) + (C1 \cdot x^2 / (2 \cdot EI)) + (C2 \cdot x / (EI)) + (C3 / (EI))$
Deslocamento: $v(x) = -(q \cdot x^4 / (24 \cdot EI)) + (C1 \cdot x^3 / 6 \cdot (EI)) + (C2 \cdot x^2 / 2 \cdot (EI)) + (C3 \cdot x / (EI)) + (C4 / (EI))$

Abaixo segue a resolução

Trecho 1
Módulo de Elasticidade (E): 210,00 GPa = $2,10 \cdot 10^8$ kN/m²
Momento de Inércia (I): $1,33 \cdot 10^{-4}$ m⁴
Área da Seção Transversal (A): $4,00 \cdot 10^{-2}$ m²
Comprimento da barra (L): 3,00 m
Carga distribuída (q): 7,00 kN/m

Trecho 2
Módulo de Elasticidade (E): 320,00 GPa = $3,20 \cdot 10^8$ kN/m²
Momento de Inércia (I): $2,13 \cdot 10^{-3}$ m⁴
Área da Seção Transversal (A): $1,60 \cdot 10^{-2}$ m²
Comprimento da barra (L): 5,00 m
Carga distribuída (q): 0 kN/m

Nó 0

Tipo de apoio: Engaste
Condições de Contorno:

Giro = 0
Equação 1: $-(7 \cdot 0^3 / (6 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C1 \cdot 1 \cdot 0^2 / (2 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C2 \cdot 1 \cdot 0 / (2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C3 \cdot 1 / (2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) = 0 \dots \rightarrow 3,57 \cdot 10^{-5} \cdot C3,1 = 0$

Deslocamento = 0:
Equação 2: $-(7 \cdot 0^4 / (24 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C1 \cdot 1 \cdot 0^3 / (6 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C2 \cdot 1 \cdot 0^2 / (2 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C3 \cdot 1 \cdot 0 / (2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C4 \cdot 1 / (2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) = 0 \dots \rightarrow 3,57 \cdot 10^{-5} \cdot C4,1 = 0$

Nó 1

Tipo de apoio: Fixo
Condições de Contorno de Compatibilização:

Momento à esquerda do apoio = Momento à direita do apoio
Equação 3: $-(7 \cdot 3^3 / 2) + (C1 \cdot 1 \cdot 3) + C2,1 = -(0 \cdot 0^2 / 2) + (C1 \cdot 2 \cdot 0) + C2,2 \dots \rightarrow 3 \cdot C1,1 + C2,1 - C2,2 = 31,5$

Giro à esquerda do apoio = Giro à direita do apoio
Equação 4: $-(7 \cdot 3^3 / (6 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C1 \cdot 1 \cdot 3^2 / (2 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C1 \cdot 2 \cdot 3 / (2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C1 \cdot 3 / (2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) = -(0 \cdot 0^3 / (6 \cdot 3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (C1 \cdot 2 \cdot 0^2 / (2 \cdot 3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (C2 \cdot 2 \cdot 0 / (3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (C3 \cdot 2 / (3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) \dots \rightarrow 1,61 \cdot 10^{-4} \cdot C1,1 + 1,07 \cdot 10^{-4} \cdot C2,1 + 3,57 \cdot 10^{-5} \cdot C3,1 - 1,46 \cdot 10^{-5} \cdot C3,2 = 1,13 \cdot 10^{-3}$

Deslocamento Vertical à esquerda do apoio = 0

Equação 5: $-(7 \cdot 3^4 / (24 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C1,1 \cdot 3^3 / (6 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C2,1 \cdot 3^2 / (2 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C3,1 \cdot 3 / (2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (C4,1 / (2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) = 0 \rightarrow 1,61 \cdot 10^{-4} \cdot C1,1 + 1,61 \cdot 10^{-4} \cdot C2,1 + 1,07 \cdot 10^{-4} \cdot C3,1 + 3,57 \cdot 10^{-5} \cdot C4,1 = 8,44 \cdot 10^{-4}$

Deslocamento Vertical à direita do apoio = 0

Equação 6: $-(0 \cdot 0^4 / (24 \cdot 3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (C1,2 \cdot 0^3 / (6 \cdot 3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (C2,2 \cdot 0^2 / (2 \cdot 3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (C3,2 \cdot 0 / (3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (C4,2 / (3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) = 0 \rightarrow -1,46 \cdot 10^{-6} \cdot C4,2 = 0$

Nó 2

Tipo de apoio: Livre

Condições de Contorno:

Cortante = P (Carga Concentrada no nó)

Equação 7: $-(0 \cdot 5) + C1,2 = 12 \rightarrow C1,2 = 12$

Momento Fletor = M (Momento Concentrado no nó)

Equação 8: $-(0 \cdot 5^2 / 2) + (C1,2 \cdot 5) + C2,2 = -3 \rightarrow 5 \cdot C1,2 + C2,2 = -3$

Segue abaixo a matriz do sistema linear final, do tipo $Ax=B$:

	C1,1	C2,1	C3,1	C4,1	C1,2	C2,2	C3,2	C4,2	x	B	
Equação 1	0,00	0,00	3,57E-05	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	C1,1	0,00	-18,38
Equação 2	0,00	0,00	0,00	3,57E-05	0,00	0,00	0,00	0,00	C2,1	0,00	23,63
Equação 3	3,00	1,00	0,00	0,00	0,00	-1,00	0,00	0,00	C3,1	31,50	0,00
Equação 4	1,61E-04	1,07E-04	3,57E-05	0,00	0,00	0,00	-1,46E-06	0,00	C4,1	1,13E-03	0,00
Equação 5	1,61E-04	1,61E-04	1,07E-04	3,57E-05	0,00	0,00	0,00	0,00	C1,2	8,44E-04	12,00
Equação 6	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-1,46E-06	C2,2	0,00	-63,00
Equação 7	0,00	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00	0,00	C3,2	12,00	-1056,00
Equação 8	0,00	0,00	0,00	0,00	5,00	1,00	0,00	0,00	C4,2	-3,00	0,00

As equações finais de cada trecho são:

Trecho 1 - Nós (0-1)

Cortante: $Q(x) = -(7 \cdot x) - 18,375$

Momento: $M(x) = -(7 \cdot x^2 / 2) + (-18,375 \cdot x) + 23,625$

Giro: $\theta(x) = -(7 \cdot x^3 / (6 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (-18,375 \cdot x^2 / (2 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (23,625 \cdot x / (2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (0 / (2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4}))$

Deslocamento: $v(x) = -(7 \cdot x^4 / (24 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (-18,375 \cdot x^3 / (6 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (23,625 \cdot x^2 / (2 \cdot 2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (0 \cdot x / (2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4})) + (0 / (2,10 \cdot 10^8 \cdot 1,33 \cdot 10^{-4}))$

Trecho 2 - Nós (1-2)

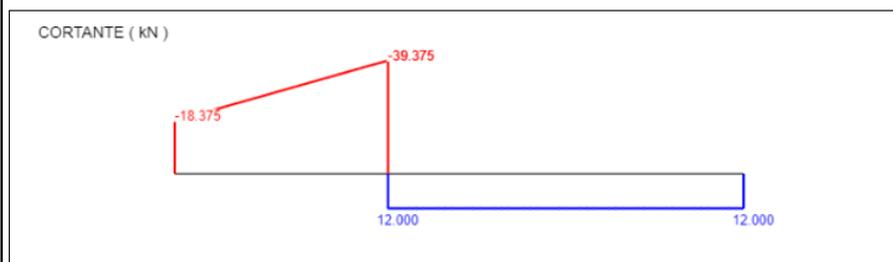
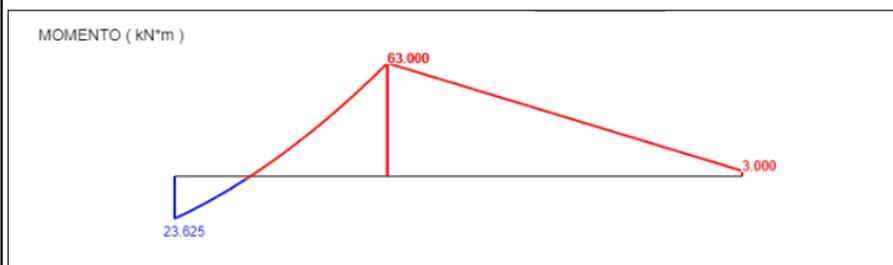
Cortante: $Q(x) = -0 \cdot x + 12$

Momento: $M(x) = -(0 \cdot x^2 / 2) + (12 \cdot x) - 63$

Giro: $\theta(x) = -(0 \cdot x^3 / (6 \cdot 3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (12 \cdot x^2 / (2 \cdot 3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (-63 \cdot x / (3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (-1056 / (3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3}))$

Deslocamento: $v(x) = -(0 \cdot x^4 / (24 \cdot 3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (12 \cdot x^3 / (6 \cdot 3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (-63 \cdot x^2 / (2 \cdot 3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (-1056 \cdot x / (3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3})) + (0 / (3,20 \cdot 10^8 \cdot 2,13 \cdot 10^{-3}))$

Abaixo seguem os diagramas (no sistema kN-m):



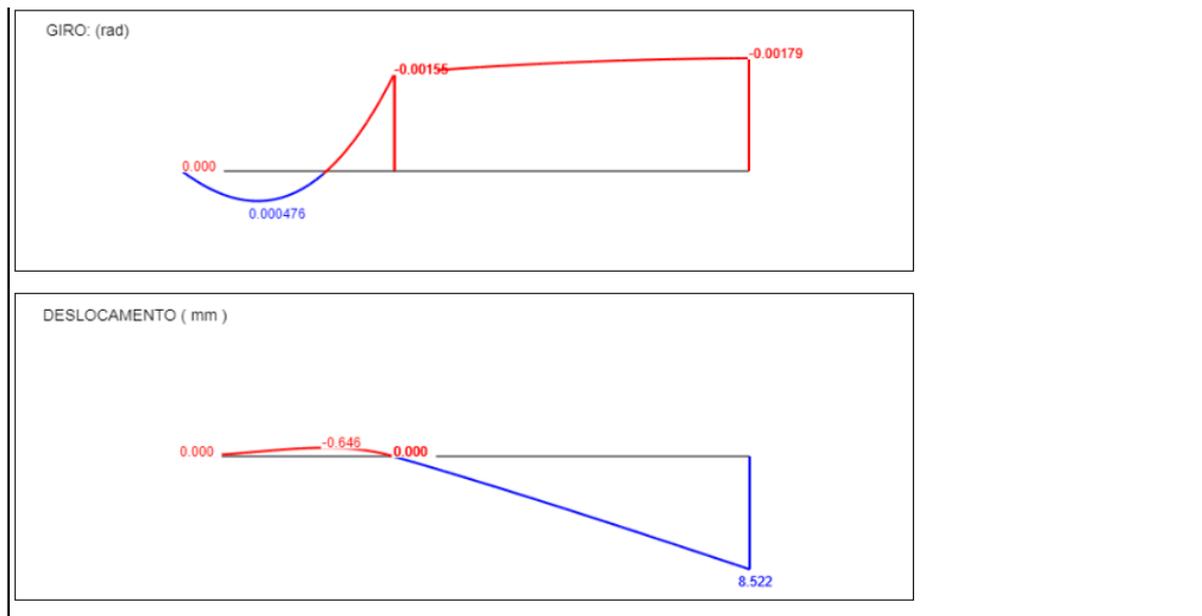


FIGURA 4. Relatório PDF gerado. Fonte: O próprio autor

Para a validação, os resultados foram comparados com os apresentados no FTOOL (2017).

CONCLUSÕES

Posto que, atualmente, o uso de *softwares* é comum e necessário na área de atuação dos engenheiros civis, é de extrema importância que haja uma plena compreensão dos dados e cálculos apresentados por esses *softwares*. Tendo em vista isso, esse módulo aqui apresentado cumpre seu objetivo em apresentar aos usuários - sejam eles estudantes, professores ou engenheiros formados - a possibilidade do acesso ao passo a passo da resolução da análise de vigas pelo Método de Euler-Bernoulli.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia pela bolsa recebida no ano de 2020, por meio do programa PIBIFSP.

REFERÊNCIAS

- FTOOL. **Ftool para Windows**, versão 4.00. PUC-Rio, 2017. Disponível em <https://www.alis-sol.com.br/Ftool/>. Acesso em: Setembro de 2020.
- SANTOS JUNIOR, L. J.; LOPES, A. J. F.; NIRSCHL, G. C. **IFESTRUT**.IFSP. Votuporanga: 2017. Disponível em: <http://vtp.ifsp.edu.br/nev/Ifestrut/ifestrut.html>. Acesso em: Setembro de 2020.
- BEER, F.P.; JOHNSTON, E.R.Jr. **Resistência dos materiais**. 3.ed. São Paulo: Makron Books, 2011.
- PROENÇA, Sergio Persival Baroncini Proença. **Curso de resistência dos materiais**. Notas de aula – vol. 1. São Carlos: USP, 2003.