

## **Investigando os fenômenos de oscilações amortecidas e forçadas.**

LEANDRO VINÍCIUS DA SILVA LOPES<sup>1</sup>; LUCAS HENRIQUE TAVARES LACERDA SOUZA.<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Possui graduação em Física pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1998) e mestrado em Física pela Universidade de São Paulo (2001). Docente na instituição Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus Birigui.

<sup>2</sup> Graduando em Licenciatura em Física pelo Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Campus Birigui, Bolsista pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid).

Apresentado no:

**10º Congresso de Inovação, Ciência e Tecnologia do IFSP.**

27 e 28 de novembro de 2019- Sorocaba-SP, Brasil.

**RESUMO:** O fenômeno da oscilação é observado na natureza, quer seja no domínio macroscópico, quer seja no microscópico. Um pêndulo é um exemplo para o primeiro caso e oscilações em torno de um ponto de equilíbrio de um átomo constituinte de uma molécula é um exemplo para o segundo. Todos esses fenômenos são analisados ao se considerar uma situação ideal, que é aquela onde não há dissipação de energia por atrito. Se este estiver presente ocorrerá o amortecimento das oscilações. Se essas oscilações forem submetidas a alguma força externa, o sistema terá que ser tratado como um oscilador forçado. O objetivo desse trabalho é se aprofundar nesses fenômenos, nas equações que os descrevem, e comparar suas diferenças, assim, foi concluído, que as oscilações amortecidas dependem de seu fator de amortecimento  $\gamma$  para se caracterizarem, enquanto as forçadas dependem das funções que caracterizam seu movimento (se são homogêneas ou não), e da força à qual elas são submetidas.

**PALAVRAS-CHAVE:** Oscilador, amortecimento, força.

**ABSTRACT:** The phenomenon of oscillation is observed in nature, whether in the macroscopic or in the microscopic domain. A pendulum is an example for the first case, and oscillations around an equilibrium point of a constituent atom of a molecule an example for the second. All these phenomena are analyzed if considering an ideal situation, which is one where there is no dissipation of energy by friction. If present, oscillation damping will occur. If these oscillations are subjected to any external force, the system will have to be treated as a forced oscillator. The objective of this paper is to delve into these phenomena, into the equations that describe them, and to compare their differences, thus, it was concluded that the damped oscillations depend on their damping factor  $\gamma$  to be characterized, while the forced oscillations depend on the functions that characterizes their movement (whether they are homogeneous or not), and of the force which they are subjected to.

**KEYWORDS:** Oscillator, damping, force.

## INTRODUÇÃO

Um caso clássico de oscilação estudado na Física é o de uma massa acoplada a uma mola que executa movimento harmônico simples, também encontrado em alguns livros como oscilador linear, devido à força ser do tipo  $F = -kx$ , onde  $F$  representa a força aplicada,  $k$  a constante da mola,  $x$  o deslocamento da massa e o sinal negativo indica que a força é sempre oposta ao movimento, ou seja, existe uma força restauradora a atuar no sistema.

Admitindo que nenhuma outra força age sobre a massa, a equação de movimento é dada por  $x'' + (k/m)x = 0$ , onde  $x''$  é a segunda derivada temporal da posição. A solução desta equação diferencial é uma função senoidal simples em torno do ponto de equilíbrio, ou seja,  $x(t) = A \sin(\omega t + \theta)$ .

Quando a força de atrito que age no sistema é pequena, ela é proporcional à velocidade. Assim, a equação de movimento torna-se  $x'' + (b/m)x' + (k/m)x = 0$ . Ao se aplicar um método de resolução de equações diferenciais, chega-se a uma equação algébrica do segundo grau, que tem a forma genérica  $x^2 + (b/m)x + (k/m) = 0$ . Ao resolver esta equação do segundo nos defrontaremos com três possibilidades, a saber:

1)  $k/m > (b/2m)^2$

2)  $k/m < (b/2m)^2$

3)  $k/m = (b/2m)^2$ .

Estas três situações distintas nos indicam que há o caso do subamortecimento, superamortecimento e amortecimento crítico. Cada uma destas situações terá um tipo de movimento.

Para sistemas dinâmicos macroscópicos, é raro haver movimento sem atrito e, portanto, a regra geral é a que ele está presente nos movimentos oscilatórios. Assim, justifica-se o estudo desse tema, das oscilações amortecidas, por estar presente em grande variedade de problemas da Física.

Por outro lado, um objeto de massa  $m$  pode oscilar de maneira forçada se estiver vinculado a algum outro objeto que gere alguma força.

Suponha o caso de um oscilador amortecido acoplado a uma mola e sujeito a uma força externa  $F_0 \cos(\omega t)$ , onde  $F_0$  é a amplitude da força e  $\omega$  é a frequência angular da oscilação. Assim, a equação de movimento para este tipo de oscilação será  $x'' + (b/m)x' + (k/m)x = F_0 \cos(\omega t)$ . Para os casos descritos anteriormente, quando as equações diferenciais são iguais a zero, basta encontrar a solução homogênea delas para chegarmos à solução do problema. Se a equação diferencial for diferente de zero, caso das oscilações forçadas e, nesse caso em específico, em que a equação diferencial é igual a  $F_0 \cos(\omega t)$ , deve-se encontrar, além da solução homogênea, a solução particular. A soma das duas soluções, aliadas às condições de contorno, levará à solução do problema.

## RESULTADOS

Todos os resultados foram obtidos mediante uso de soluções típicas de equações diferenciais que, devido à sua complexidade, não cabe expor em detalhes aqui. Serão apresentadas as soluções e seus respectivos gráficos.

Para o primeiro caso, das oscilações subamortecidas, a solução é do tipo  $x(t) = A \exp(-\gamma t) \cos(\omega t + \theta)$ , cujo gráfico é mostrado na figura 1.

Para o segundo caso, das oscilações superamortecidas, a solução é do tipo  $x(t) = C_1 \exp(-\gamma_1 t) + C_2 \exp(-\gamma_2 t)$ , cujo gráfico é mostrado na figura 2 (linha superior).

Para o terceiro caso, das oscilações criticamente amortecidas, a solução é  $x(t) = (C_1 + C_2 t) \exp(-\gamma t)$ , cujo gráfico é mostrado também na figura 3 (linha inferior).

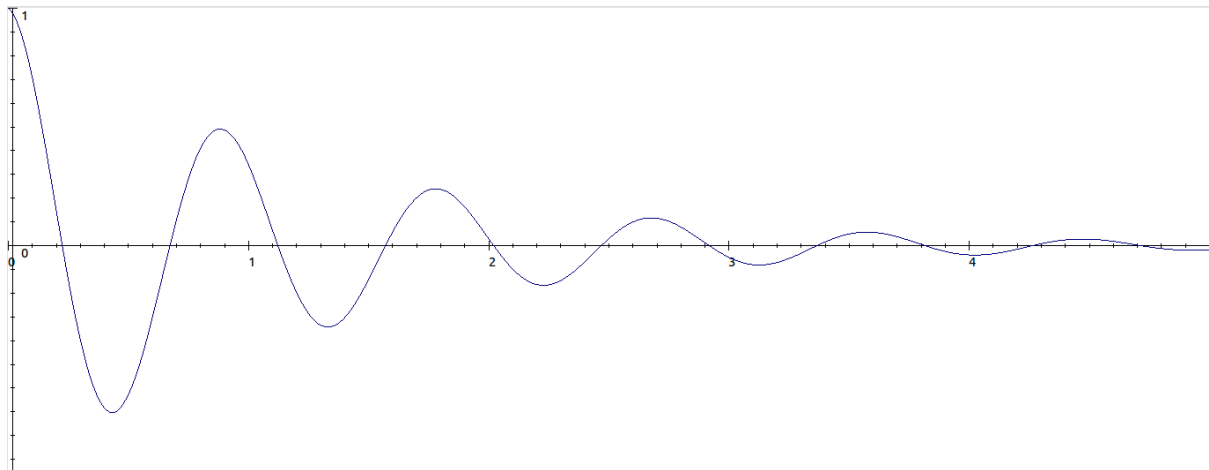


Figura 1: Representação gráfica de um exemplo de oscilação subamortecida.

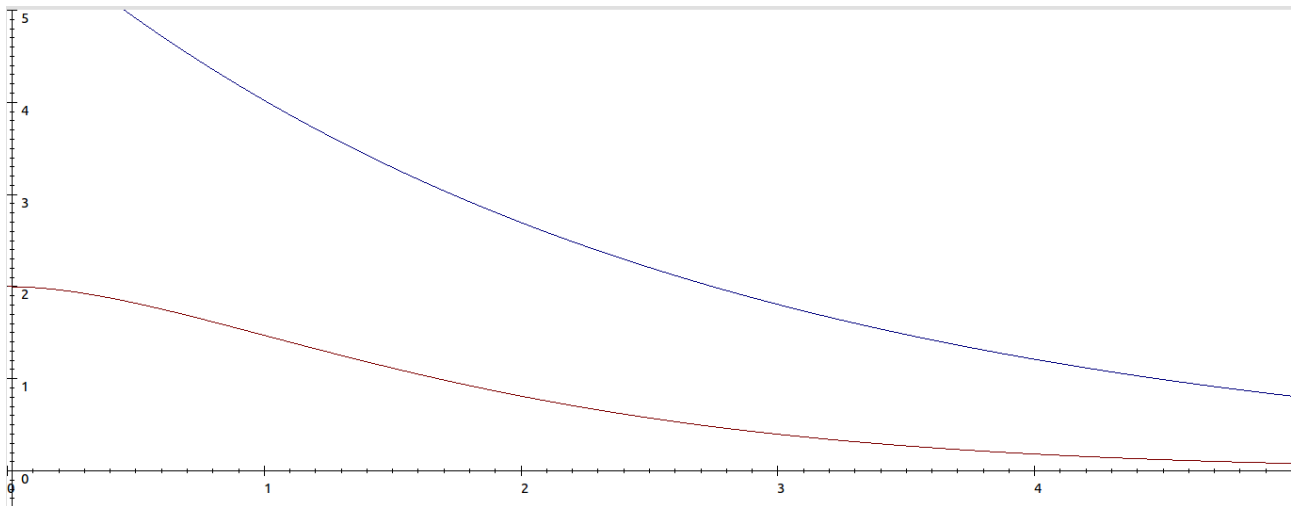


Figura 2: Representação gráfica para a comparação de oscilações superamortecidas (linha azul) e criticamente amortecidas (linha vermelha).

Para a oscilação forçada, foi encontrada a solução homogênea, do tipo  $x_h(t) = (C_1 + C_2 t) \exp(-\gamma t)$ , e a solução particular:

$$x_p(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\omega\omega_0 \sin \omega t].$$

Figura 3: Forma homogênea da oscilação forçada.

A solução geral é dada por:

$$x(t) = (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t} + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)^2} [(\omega_0^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + 2\omega\omega_0 \sin \omega t].$$

Figura 4: Forma geral, oscilação forçada.

## CONCLUSÕES

As soluções das oscilações amortecidas dependem fortemente do fator de amortecimento  $\gamma$ , quanto maior seu valor, mais rápido será atingida a posição de equilíbrio e menos oscilações o objeto fará. Por outro lado, quanto menor o seu valor, menor será o amortecimento e mais a oscilação se aproximará de um movimento harmônico simples.

A solução de uma oscilação forçada inclui duas partes, a primeira é a transiente, que decai exponencialmente com o tempo e depende das condições de contorno do problema. A segunda parte é a solução estacionária, que oscila com amplitude constante e depende da força aplicada; no nosso caso ela depende do cosseno do ângulo e esse termo aparece na solução. Ela não depende das condições iniciais como no caso do transiente.

## REFERÊNCIAS

KELLER, F. J.; GETTYS, W. E.; SKOVE, M. J. **Física**. São Paulo: Pearson/Makron, 1999. v.1.  
NETO, J. B. **Mecânica: Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana**. 2.ed. São Paulo: Livraria da Física, 2013.  
NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica**. 4.ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2003. v.1.  
SYMON, K. R. **Mecânica**. Rio de Janeiro. Editora Câmpus, 1996.  
THORNTON, S. T.; MARION, J. B. **Dinâmica Clássica de Partículas e Sistemas**. 5.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.  
TIPLER, P. A.; MOSCA, G. **Física para cientistas e engenheiros**. 6.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009. v. 1.  
GOLDSTEIN, H.; POOLE, C. P.; SAFKO, J. L. **Classical Mechanics**. 3.ed. São Paulo: PEARSON, 2014.